



## 专题 4 线面平行与面面平行的判定及性质

### 一、直线与平面平行

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则直线与此平面平行。		$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ b \parallel a \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$
性质定理	如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行。		$\left. \begin{array}{l} a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ a \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$

### 二、平面与平面平行

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面内有两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行		$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a \parallel \beta \\ b \parallel \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
性质定理	如果两个平行平面时与第三个平面相交，那么它们的交线平行		$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$

【例 1】下列条件中，能判断两个平面平行的是（ ）

- A. 一个平面内的一条直线平行于另一个平面
- B. 一个平面内的两条直线平行于另一个平面
- C. 一个平面内有无数条直线平行于另一个平面
- D. 一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面

【解析】由面面平行的定义可知选 D.

【例 2】若直线  $a$  平行于平面  $\alpha$ ，则下列结论错误的是（ ）

- A.  $a$  平行于  $\alpha$  内的所有直线
- B.  $\alpha$  内有无数条直线与  $a$  平行
- C. 直线  $a$  上的点到平面  $\alpha$  的距离相等
- D.  $\alpha$  内存在无数条直线与  $a$  垂直

【解析】A 错误， $a$  与  $\alpha$  内的直线平行或异面。

【例 3】已知不重合的直线  $a$ ,  $b$  和平面  $\alpha$ ，①若  $a \parallel \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ , 则  $a \parallel b$ ; ②若  $a \parallel \alpha$ ,  $b \parallel \alpha$ , 则  $a \parallel b$ ; ③若  $a \parallel b$ ,  $b \subset \alpha$ , 则  $a \parallel \alpha$ ; ④若  $a \parallel b$ ,  $a \parallel \alpha$ , 则  $b \parallel \alpha$  或  $b \subset \alpha$ ，上面命题中正确的是\_\_\_\_\_ (填序号)。

【解析】①中  $a$  与  $b$  可能异面；②中  $a$  与  $b$  可能相交、平行或异面；③中  $a$  可能在平面  $\alpha$  内，④正确。



**【例 4】**已知 $\alpha$ 、 $\beta$ 是平面， $m$ 、 $n$ 是直线，给出下列命题：①若 $m \perp \alpha$ ,  $m \subset \beta$ , 则 $\alpha \perp \beta$ . ②若 $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \alpha$ ,  $m \parallel \beta$ ,  $n \parallel \beta$ , 则 $\alpha \parallel \beta$ . ③如果 $m \subset \alpha$ ,  $n \not\subset \alpha$ ,  $m$ 、 $n$ 是异面直线, 那么 $n$ 与 $\alpha$ 相交. ④若 $\alpha \cap \beta = m$ ,  $n \parallel m$ , 且 $n \not\subset \alpha$ ,  $n \not\subset \beta$ , 则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$ . 其中正确命题的个数是（ ）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**【解析】**对于①, 由定理“如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面垂直”得知, ①正确; 对于②, 注意到直线 $m$ ,  $n$ 可能是两条平行直线, 此时平面 $\alpha$ ,  $\beta$ 可能是相交平面, 因此②不正确; 对于③, 满足条件的直线 $n$ 可能平行于平面 $\alpha$ , 因此③不正确; 对于④, 由定理“如果平面外一条直线平行于平面内一条直线, 那么这条直线平行于这个平面”得知, ④正确. 综上所述, 其中正确的命题是①④, 故选 B.

**【例 5】**已知 $m$ ,  $n$ 表示两条不同直线,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ 表示不同平面, 给出下列三个命题:

$$\text{①} \begin{cases} m \perp \alpha \\ n \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow m \parallel n; \quad \text{②} \begin{cases} m \perp \alpha \\ m \perp n \end{cases} \Rightarrow n \parallel \alpha; \quad \text{③} \begin{cases} m \perp \alpha \\ n \parallel \alpha \end{cases} \Rightarrow m \perp n$$
 其中真命题的个数为（ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

**【解析】**若 $\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \perp \alpha \end{cases}$ , 则 $m \parallel n$ , 即命题①正确; 若 $\begin{cases} m \perp \alpha \\ m \perp n \end{cases}$ , 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ , 即命题②不正确; 若 $\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \parallel \alpha \end{cases}$ , 则 $m \perp n$ , 即命题③正确; 综上可得, 真命题共有 2 个. 故选 C.

**【例 6】**已知 $m$ 、 $n$ 、 $l_1$ 、 $l_2$ 表示直线,  $\alpha$ 、 $\beta$ 表示平面. 若 $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \alpha$ ,  $l_1 \subset \beta$ ,  $l_2 \subset \beta$ ,  $l_1 \cap l_2 = M$ , 则以下条件中, 能推出 $\alpha \parallel \beta$ 的是（ ）

A.  $m \parallel \beta$ 且 $l_1 \parallel \alpha$       B.  $m \parallel \beta$ 且 $n \parallel \beta$       C.  $m \parallel \beta$ 且 $n \parallel l_2$       D.  $m \parallel l_1$ 且 $n \parallel l_2$ 

**【解析】**由定理“如果一个平面内有两条相交直线分别与另一个平面平行, 那么这两个平面平行”可得, 由选项 D 可推知 $\alpha \parallel \beta$ .

**【例 7】**在下列条件中, 可判断平面 $\alpha$ 与 $\beta$ 平行的是（ ）

- A.  $\alpha$ 、 $\beta$ 都平行于直线 $l$       B.  $\alpha$ 内存在不共线的三点到 $\beta$ 的距离相等  
C.  $l$ 、 $m$ 是 $\alpha$ 内两条直线, 且 $l \parallel \beta$ ,  $m \parallel \beta$       D.  $l$ 、 $m$ 是两条异面直线, 且 $l \parallel \alpha$ ,  $m \parallel \alpha$ ,  $l \parallel \beta$ ,  $m \parallel \beta$

**【解析】**排除法, A 中 $\alpha$ 、 $\beta$ 可以是相交平面; B 中三点可面平面两侧; C 中两直线可以不相交. 故选 D, 也可直接证明.

**【例 8】**经过平面外的两点作该平面的平行平面可以作（ ）

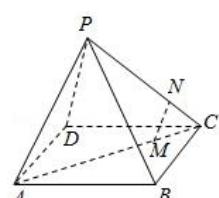
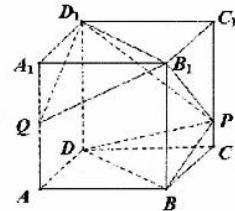
A. 0 个      B. 1 个      C. 0 个或 1 个      D. 1 个或 2 个

**【解析】**这两点可以是在平面同侧或两侧. 故选 C.



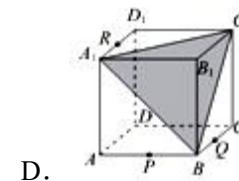
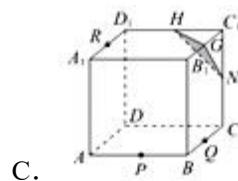
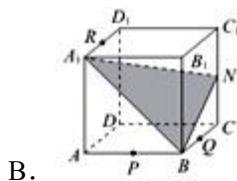
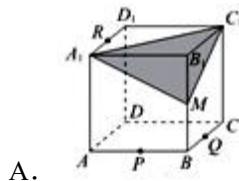
## 达标训练 1

1. (2019·延安一模) 已知  $m$ ,  $n$  表示两条不同的直线,  $\alpha$  表示平面. 下列说法正确的是 ( )
- A. 若  $m \parallel \alpha$ ,  $n \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel n$       B. 若  $m \perp \alpha$ ,  $n \perp \alpha$ , 则  $m \parallel n$   
C. 若  $m \perp \alpha$ ,  $m \perp n$ , 则  $n \parallel \alpha$       D. 若  $m \parallel \alpha$ ,  $m \perp n$ , 则  $n \perp \alpha$
2. (2019·湖北期中) 平面  $\alpha$  与平面  $\beta$  平行的条件可以是 ( )
- A.  $\alpha$  内有无数多条直线都与  $\beta$  平行  
B. 直线  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ , 且  $a \parallel \beta$ ,  $b \parallel \alpha$   
C. 直线  $a \parallel \alpha$ ,  $a \parallel \beta$ , 且直线  $a$  不在  $\alpha$  内, 也不在  $\beta$  内  
D. 一个平面  $\alpha$  内两条不平行的直线都平行于另一个平面  $\beta$
3. (2019·深圳二模) 已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ,  $P$  为棱  $CC_1$  的动点,  $Q$  为棱  $AA_1$  的中点, 设直线  $m$  为平面  $BDP$  与平面  $B_1D_1P$  的交线, 以下关系中正确的是 ( )
- A.  $m \parallel D_1Q$       B.  $m \parallel$  平面  $B_1D_1Q$   
C.  $m \perp B_1Q$       D.  $m \perp$  平面  $ABB_1A_1$
4. (2019·聊城二模) 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $F$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  分别为棱  $A_1B_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $C_1D_1$  的中点, 则下列结论中正确的是 ( )
- A.  $AD_1 \parallel$  平面  $EFGH$       B.  $BD_1 \parallel GH$   
C.  $BD \parallel EF$       D. 平面  $EFGH \parallel$  平面  $A_1BCD_1$
5. (2019·汕头月考) 如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$ ,  $N$  分别是  $BC_1$ ,  $CD_1$  的中点, 则下列判断错误的是 ( )
- A.  $MN \perp CC_1$       B.  $MN \perp$  平面  $ACC_1A_1$   
C.  $MN \parallel$  平面  $ABCD$       D.  $MN \parallel A_1B_1$
6. (2019·大连一模) 已知  $m$ ,  $n$  为两条不重合直线,  $\alpha$ ,  $\beta$  为两个不重合平面, 下列条件中, 可以作为  $\alpha \parallel \beta$  的充分条件的是 ( )
- A.  $m \parallel n$ ,  $m \subset \alpha$ ,  $n \subset \beta$       B.  $m \parallel n$ ,  $m \perp \alpha$ ,  $n \perp \beta$   
C.  $m \perp n$ ,  $m \parallel \alpha$ ,  $n \parallel \beta$       D.  $m \perp n$ ,  $m \perp \alpha$ ,  $n \perp \beta$
7. (2019·汕头一模) 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $O$  是四边形  $ABCD$  的中心, 关于直线  $A_1O$ , 下列说法正确的是 ( )
- A.  $A_1O \parallel D_1C$       B.  $A_1O \perp BC$   
C.  $A_1O \parallel$  平面  $B_1CD_1$       D.  $A_1O \perp$  平面  $AB_1D_1$
8. (2019·青云月考) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $M$ ,  $N$  分别为  $AC$ ,  $PC$  上的点, 且  $MN \parallel$  平面  $PAD$ , 则 ( )
- A.  $MN \parallel PD$       B.  $MN \parallel PA$   
C.  $MN \parallel AD$       D. 以上均有可能
9. (2019·上饶一模) 设  $m$ ,  $n$  表示不同的直线,  $\alpha$ ,  $\beta$  表示不同的平面, 且  $m$ ,  $n \subset \alpha$ . 则“ $\alpha \parallel \beta$ ”是“ $m \parallel \beta$  且  $n \parallel \beta$ ”的 ( )



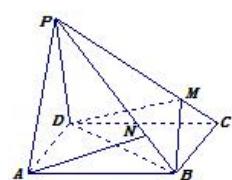


- A. 充分但不必要条件  
B. 必要但不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不充分又不必要条件
10. (2018·沧州一模) 如图, 在下列四个正方体中,  $P$ ,  $R$ ,  $Q$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $G$ ,  $H$  为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 阴影平面与  $PRQ$  所在平面平行的是 ( )

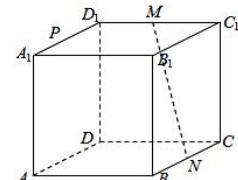


11. (2017·洛南期末) 已知平面  $\alpha \parallel$  平面  $\beta$ , 直线  $m \subset \alpha$ , 直线  $n \subset \beta$ , 下列结论中不正确的是 ( )
- A.  $m \parallel \beta$   
B.  $n \parallel \alpha$   
C.  $m \parallel n$   
D.  $m$  与  $n$  不相交

12. (2018·杭州期中) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  是平行四边形,  $M$ 、 $N$  分别为线段  $PC$ 、 $PB$  上一点, 若  $PM:MC=3:1$ , 且  $AN \parallel$  平面  $BDM$ , 则  $PN:NB=( )$
- A. 4:1  
B. 3:1  
C. 3:2  
D. 2:1



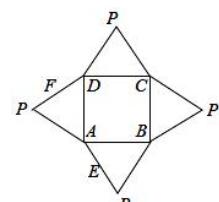
13. (2018·厦门二模) 如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$ ,  $N$ ,  $P$  分别是  $C_1D_1$ ,  $BC$ ,  $A_1D_1$  的中点, 则下列命题正确的是 ( )
- A.  $MN \parallel AP$   
B.  $MN \parallel BD_1$   
C.  $MN \parallel$  平面  $BB_1D_1D$   
D.  $MN \parallel$  平面  $BDP$



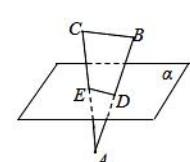
14. (2018·辛集期中) 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $Q$  为  $AD$  的中点, 点  $M$  在线段  $PC$  上,  $PM=tPC$ ,  $PA \parallel$  平面  $MQB$ , 则实数  $t$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{5}$   
B.  $\frac{1}{4}$   
C.  $\frac{1}{3}$   
D.  $\frac{1}{2}$

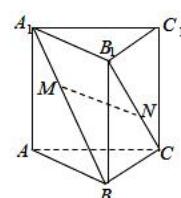
15. (2018·四川模拟) 如图是某几何体的平面展开图, 其中四边形  $ABCD$  为正方形,  $E$ ,  $F$  分别为  $PA$ ,  $PD$  的中点. 在此几何体中, 以下结论一定成立的是 ( )
- A. 直线  $BE \parallel PF$   
B. 直线  $EF \parallel$  平面  $PBC$   
C. 平面  $BCE \perp$  平面  $PAD$   
D. 直线  $PB$  与  $DC$  所成角为  $60^\circ$



16. (2017·万州期末) 平面  $\alpha$  与  $\triangle ABC$  的两边  $AB$ ,  $AC$  分别交于点  $D$ ,  $E$ , 且  $AD:DB=AE:EC$ , 如图, 则  $BC$  与  $\alpha$  的位置关系是 ( )
- A. 异面  
B. 相交  
C. 平行或相交  
D. 平行



17. (2018·桃城模拟) 如图, 各棱长均为 1 的正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$ ,  $M$ ,  $N$  分别为线段  $A_1B$ ,  $B_1C$  上的动点, 且  $MN \parallel$  平面  $ACC_1A_1$ , 则这样的  $MN$  有 ( )
- A. 1 条  
B. 2 条  
C. 3 条  
D. 无数条





18. (2018·雁江月考) 已知  $P$  为  $\triangle ABC$  所在平面外一点, 平面  $\alpha \parallel$  平面  $ABC$ , 且  $\alpha$  交线段  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  于点  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , 若  $PA':AA'=2:3$ , 则  $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC} = (\quad)$

- A. 2:3      B. 2:5  
C. 4:9      D. 4:25

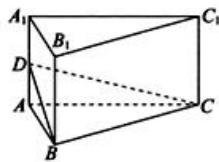
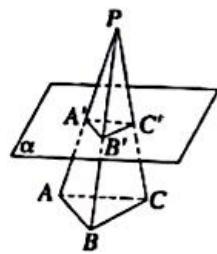
19. (2018·香坊四模) 对于不重合的两个平面  $\alpha$  和  $\beta$ , 给定下列条件:

- ①存在直线  $l$ , 使得  $l \perp \alpha$ , 且  $l \perp \beta$ ;  
②存在平面  $\gamma$ , 使得  $\alpha \perp \gamma$  且  $\beta \perp \gamma$ ;  
③ $\alpha$  内有不共线的三点到  $\beta$  的距离相等;  
④存在异面直线  $l$ ,  $m$ , 使得  $l \parallel \alpha$ ,  $l \parallel \beta$ ,  $m \parallel \alpha$ ,  $m \parallel \beta$ .

其中, 可以判定  $\alpha$  与  $\beta$  平行的条件有 ( )

- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

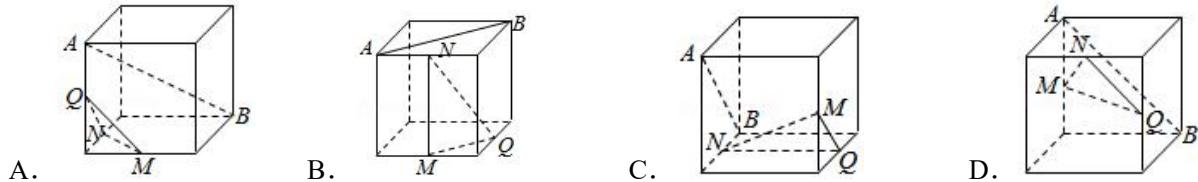
20. (2018·西城期末) 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $D$  为  $AA_1$  中点, 点  $P$  在侧面  $BCC_1B_1$  上运动, 当点  $P$  满足条件 \_\_\_\_\_ 时,  $A_1P \parallel$  平面  $BCD$  (答案不唯一, 填一个满足题意的条件即可)





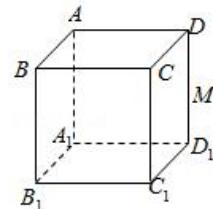
## 达标训练 2

1. (2017·新课标I) 如图, 在下列四个正方体中,  $A$ ,  $B$  为正方体的两个顶点,  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线  $AB$  与平面  $MNQ$  不平行的是 ( )



2. (2011·浙江) 若直线  $l$  不平行于平面  $\alpha$ , 且  $l \not\subset \alpha$ , 则 ( )
- A.  $\alpha$  内存在直线与  $l$  异面      B.  $\alpha$  内存在与  $l$  平行的直线  
 C.  $\alpha$  内存在唯一的直线与  $l$  平行      D.  $\alpha$  内的直线与  $l$  都相交
3. (2010·浙江) 设  $l$ ,  $m$  是两条不同的直线,  $\alpha$  是一个平面, 则下列命题正确的是 ( )
- A. 若  $l \perp m$ ,  $m \subset \alpha$ , 则  $l \perp \alpha$       B. 若  $l \perp \alpha$ ,  $l \parallel m$ , 则  $m \perp \alpha$   
 C. 若  $l \parallel \alpha$ ,  $m \subset \alpha$ , 则  $l \parallel m$       D. 若  $l \parallel \alpha$ ,  $m \parallel \alpha$ , 则  $l \parallel m$
4. (2010·江西) 如图,  $M$  是正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱  $DD_1$  的中点, 给出下列命题

- ①过  $M$  点有且只有一条直线与直线  $AB$ 、 $B_1C_1$  都相交;  
 ②过  $M$  点有且只有一条直线与直线  $AB$ 、 $B_1C_1$  都垂直;  
 ③过  $M$  点有且只有一个平面与直线  $AB$ 、 $B_1C_1$  都相交;  
 ④过  $M$  点有且只有一个平面与直线  $AB$ 、 $B_1C_1$  都平行.



其中真命题是 ( )

- A. ②③④      B. ①③④      C. ①②④      D. ①②③
5. (2008·湖南) 已知直线  $m$ 、 $n$  和平面  $\alpha$ 、 $\beta$  满足  $m \perp n$ ,  $m \perp \alpha$ ,  $\alpha \perp \beta$ , 则 ( )
- A.  $n \perp \beta$       B.  $n \parallel \beta$ , 或  $n \subset \beta$       C.  $n \perp \alpha$       D.  $n \parallel \alpha$ , 或  $n \subset \alpha$
6. (2007·北京) 平面  $\alpha \parallel$  平面  $\beta$  的一个充分条件是 ( )

- A. 存在一条直线  $a$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $a \parallel \beta$   
 B. 存在一条直线  $a$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $a \parallel \beta$   
 C. 存在两条平行直线  $a$ ,  $b$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ ,  $a \parallel \beta$ ,  $b \parallel \alpha$   
 D. 存在两条异面直线  $a$ ,  $b$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ ,  $a \parallel \beta$ ,  $b \parallel \alpha$

7. (2011·福建) 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2$ , 点  $E$  为  $AD$  的中点, 点  $F$  在  $CD$  上, 若  $EF \parallel$  平面  $AB_1C$ , 则线段  $EF$  的长度等于 \_\_\_\_\_.

