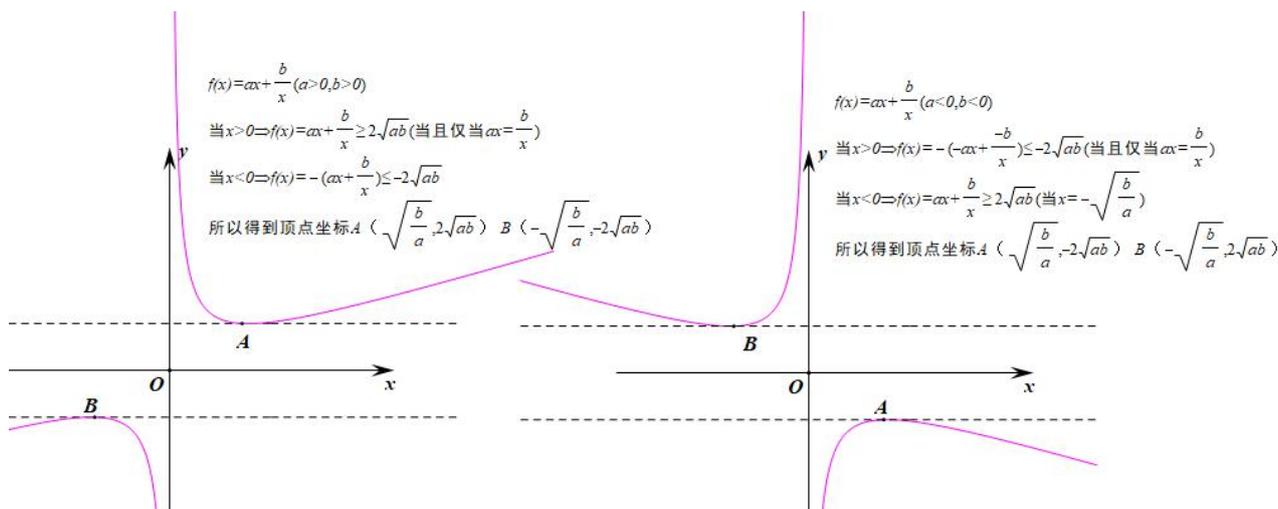




专题3 对勾函数解决恒成立和实根分布问题



对勾函数是一种类似于反比例函数的一般函数，形如 $f(x) = ax + \frac{x}{b}$

当 a, b 同号时， $f(x) = ax + \frac{x}{b}$ 的图象是由直线 $y = ax$ 与双曲线 $y = \frac{x}{b}$ 构成，形状酷似双勾。故称“对勾函数”，也称“耐克函数”。耐克函数的顶点： $(\sqrt{\frac{b}{a}}, 2\sqrt{ab})$ 和 $(-\sqrt{\frac{b}{a}}, -2\sqrt{ab})$

【例1】 已知函数 $f(x) = x^2 - ax + 1 \geq 0$ 对于一切 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 成立，求 a 的取值范围。

【解析】 根据题意得 $x^2 + 1 \geq ax$ 在 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 上恒成立，即： $x + \frac{1}{x} \geq a$ 在 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 上恒成立，设 $g(x) = x + \frac{1}{x}$ ，则 $g(x) \geq 2$ 当 $x = 1$ 时， $g(x) = 2$ ，但 $x \in (0, \frac{1}{2}]$ 所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ ， $a \leq \frac{5}{2}$ 。

【例2】 方程 $x^2 - ax + 4 = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 内有解，求 a 的取值范围。

【解析】 根据题意得： $x = 0$ 时，无解； $x^2 + 4 = ax$ 在 $x \in (0, 1]$ 内有解，即： $x + \frac{4}{x} = a$ 在 $x \in (0, 1]$ 上的取值范围，设 $g(x) = x + \frac{4}{x}$ ，则 $g(x) \geq 5$ 当 $x = 1$ 时， $g(x) = 5$ ，故 $a \geq 5$

达标训练

1. 若对于 $-5 \leq x \leq 1$ ，不等式 $x^2 + ax + 6 - a > 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。



2. 已知不等式 $x^2 - (a+1)x + a < 0$.

- (1) 若不等式在 $(1, 3)$ 上有解, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 若不等式在 $(1, 3)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x) = 3x^2 + 2(k-1)x + k + 5$ ($k \in R$).

- (1) 对任意 $k \in (-1, 1)$, 不等式 $f(x) < 0$ 恒成立, 求 x 的取值范围;
- (2) 若函数在区间 $(0, 2)$ 内有零点, 求 k 的取值范围.

4. 已知 a 是实数, 函数 $f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$. 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有零点, 求 a 的取值范围.