获取更多资料加qq群698274639

参考答案
CANKAODAAN

第1章　六脉神剑出江湖　三角函数秒杀路

专题1　三角函数图像与性质

达标训练

1. A 【解析】因为 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$是函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$两个相邻的极值点，所以 $T=2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$ 所以 $\omega=2$，故选 A.

2. A 【解析】$f(x)=\sin|x|$不是周期函数，可排除 D 选项；$f(x)=\cos|x|$的周期为 2π，可排除 C 选项；$f(x)=|\sin 2x|$在$\frac{\pi}{4}$处取得最大值，不可能在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，可排除 B. 故选 A.

3. D 【解析】当 $x\in[0,2\pi]$时，$\omega x+\frac{\pi}{5}\in[\frac{\pi}{5},2\pi\omega+\frac{\pi}{5}]$，因为$f(x)$在$[0,2\pi]$有且仅有 5 个零点，所以 $5\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{5}<6\pi$，所以$\frac{12}{5}\leqslant\omega<\frac{29}{10}$，故④正确，因此由选项可知只需判断③是否正确即可得到答案，下面判断③是否正确，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$时，$\omega x+\frac{\pi}{5}\in\left[\frac{\pi}{5},\frac{(\omega+2)\pi}{10}\right]$，若$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$单调递增，则$\frac{(\omega+2)\pi}{10}<\frac{\pi}{2}$，即 $\omega<3$，因为$\frac{12}{5}\leqslant\omega<\frac{29}{10}$，故③正确. 故选 D.

4. C　5. B　6. C　7. C　8. D　9. A　10. B
11. B　12. D　13. B　14. A　15. A　16. D
17. D　18. A　19. A　20. A　21. B　22. A
23. B　24. C　25. A

26. 【解析】因为$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x=-\cos 2x-3\cos x=-2\cos^2x-3\cos x+1$，令 $t=\cos x$，则 $-1\leqslant t\leqslant 1$，因为 $f(t)=-2t^2-3t+1$ 的开口向上，对称轴 $t=-\frac{3}{4}$，在$[-1,1]$上先增后减，故当 $t=1$ 即 $\cos x=1$ 时，函数有最小值 -4. 故答案为 -4

27. 1　28. $\frac{3}{2}$　29. $\sqrt{3}$　30. $\sqrt{3}$　31. $(-\infty,2]$

32. 【解析】(1)$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{3}-4\cos\frac{\pi}{3}=-1+\frac{3}{4}-2=-\frac{9}{4}$；(2)$f(x)=2(2\cos^2x-1)+(1-\cos^2x)-4\cos x=3\cos^2x-4\cos x-1=3\left(\cos x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3}$，$x\in\boldsymbol{R}$，因为 $\cos x\in[-1,1]$，所以当 $\cos x=-1$ 时，$f(x)$取最大值 6；当 $\cos x=\frac{2}{3}$时，取最小值 $-\frac{7}{3}$.

33. 【解析】$y=7-4\sin x\cos x+4\cos^2x-4\cos^4x=7-2\sin 2x+4\cos^2x(1-\cos^2x)=7-2\sin 2x+4\cos^2x\sin^2x=7-2\sin 2x+\sin^2 2x=(1-\sin 2x)^2+6$. 由于函数 $z=(u-1)^2+6$ 在$[-1,1]$中的最大值为 $z_{max}=(-1-1)^2+6=10$，最小值为 $z_{min}=(1-1)^2+6=6$，故当 $\sin 2x=-1$ 时 y 取得最大值 10，当 $\sin 2x=1$ 时 y 取得最小值 6.

专题2　两角和与差的正弦、余弦和正切

达标训练

1. B　2. C　3. B　4. D　5. A　6. D　7. A
8. A

9. $-\frac{1}{2}$　10. $\frac{3}{2}$　11. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　12. $\frac{7}{5}$　13. $\sqrt{2}$，1
14. ± 3　15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　16. $-\frac{4}{3}$　17. π，$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$
18. 3

19. 【解析】(1)函数$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=$

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；(2)若$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\ m\right]$上的最大值为$\frac{3}{2}$，可得$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\ 2m-\frac{\pi}{6}\right]$，即有$2m-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}$，解得$m\geqslant\frac{\pi}{3}$，则$m$的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

20. 【解析】(1)因为角α的顶点与原点O重合，始边与x轴非负半轴重合，终边过点$P\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$. 所以$x=-\frac{3}{5}$，$y=-\frac{4}{5}$，$r=|OP|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$，所以$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=-\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$；(2)由$x=-\frac{3}{5}$，$y=-\frac{4}{5}$，$r=|OP|=1$，得$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，又由$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，得$\cos(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\pm\frac{12}{13}$，则$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{56}{65}$，或$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{65}$. 所以$\cos\beta$的值为$-\frac{56}{65}$或$\frac{16}{65}$.

21. 【解析】(1)$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-2\sin x\cos x=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)-\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以$f(x)$的最小正周期为$\pi$；

(2)因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$，所以$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，所以$f(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.

22. 【解析】(1)函数$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin x-\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故函数的周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2)当$x\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in[0,\ \pi]$，故当$0\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$时，即$x\in\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{12}\right]$时，$f(x)$为增函数；当$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi$时，即$x\in\left[\frac{5\pi}{12},\ \frac{2\pi}{3}\right]$时，$f(x)$为减函数.

23. 【解析】(1)因为函数$f(x)=2\cos x(\sin x+\cos x)=\sin 2x+1+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，所以$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1=\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}+1=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2$；

(2)因为函数$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，故它的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$. 令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，求得$k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，故函数的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},\ k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

24. 【解析】(1)由$f(x)=\sin x$，得$f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$，因为$f(x+\theta)$为偶函数，所以$\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$($k\in\mathbf{Z}$)，因为$\theta\in[0,\ 2\pi)$，所以$\theta=\frac{\pi}{2}$或$\theta=\frac{3\pi}{2}$；

(2)$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=1-\frac{1}{2}\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}-\sin 2x\right)=\frac{3}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，因为 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,1]$，所以 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1\in\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

专题3　正切恒等式

达标训练

1. B　**2.** C　**3.** A　**4.** C　**5.** A　**6.** B　**7.** A

8. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$　**9.** $\frac{\pi}{6}$　**10.** $\sqrt{3}$　**11.** 12

12. $\left[\frac{3}{4},1\right)$　**13.** 3　**14.** $\frac{2\pi}{3}$　**15.** $\frac{\pi}{4}$

16. 【解析】(1)$a=8$ 时，$x^2-8x+4=0$，所以 $\tan A+\tan B=8$，$\tan A\tan B=4$；所以 $\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\frac{8}{3}$. 可以用正切恒等式直接秒杀，不过要写证明过程；(2)由题意，$\Delta=a^2-16\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 4$ 或 $a\leqslant -4$；又 $\tan A\tan B=4>0$，所以 $\begin{cases}\tan A>0\\ \tan B>0\end{cases}$，所以 $\tan A+\tan B=-a>0$，所以 $a<0$，即 $a\leqslant -4$；所以 $\tan C=-\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\frac{-a}{3}\geqslant\frac{4}{3}$，所以 $\tan C$ 的最小值是 $\frac{4}{3}$，此时对应的 $\tan A=\tan B=2$.

17. 【解析】(1)因为 $b=\frac{a}{2}\sin C$，所以 $2\sin B=\sin A\sin C$，所以 $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin C\cos A+\cos C\sin A}{\sin A\sin C}=\frac{\sin(A+C)}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{\sin A\sin C}=\frac{\sin B}{2\sin B}=\frac{1}{2}$；(2)因为由(1)可得 $2\sin B=\sin A\sin C=\sin A\sin(A+B)=\sin A(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$，$=\sin^2 A\cos B+\sin A\cos A\sin B$，所以 $2\tan B=\sin^2 A+\sin A\cos A\tan B$，所以 $\tan B=\frac{\sin^2 A}{2-\sin A\cos A}=\frac{\sin^2 A}{2\sin^2 A+2\cos^2 A-\sin A\cos A}=\frac{\tan^2 A}{2\tan^2 A+2-\tan A}=\frac{1}{2+2\cdot\left(\frac{1}{\tan A}\right)^2-\frac{1}{\tan A}}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{4}\right)^2+2-\frac{1}{8}}$. 锐角 $\triangle ABC$ 中，因为 $\tan A>0$，所以 $\frac{1}{\tan A}>0$，故当 $\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{4}$ 时，$2\tan B$ 取得最大值为 $=\frac{8}{15}$，故 $\tan B$ 的最大值为 $\frac{8}{15}$.

专题4　ω 函数之卡根法

达标训练

1. C　【解析】因为 $x=-\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图像的一条对称轴，又因为 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 是 $f(x)$ 图像的一个对称中心，$\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}=\frac{2k-1}{4}T$，所以 ω 可以表示为 $\omega=2k-1(k\in\mathbf{Z})$，故选 C.

2. D　【解析】最大值卡根：$\frac{\pi}{6}<\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{6}$，D 不符合，故选 D.

3. C　【解析】因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$. 因为 $f(x)$ 是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{5}\right)$ 上的单调函数，所以 $\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\leqslant\frac{\pi}{3}$，且 $\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{2}\geqslant\frac{4\pi}{5}$，求得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant-\frac{\pi}{10}$，故选 C.

4. C　【解析】定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $y=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，因为函数有零点，所以 $\pi\geqslant\frac{0+\frac{\pi}{6}}{\omega}\geqslant 0$，所以 $\omega\geqslant\frac{1}{6}$. 且函数的值域 $M\subseteq\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$，联想 $y=\sin x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 时，$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，因为 $\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{\omega}=0$，所以

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{6}}{\omega}\geqslant\pi$，求得 $\omega\leqslant\frac{4}{3}$，则 ω 的取值范围为 $\left[\frac{1}{6},\frac{4}{3}\right]$，故选 C.

5. B 【解析】因为 $-1\leqslant 3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 3$，所以 $-\frac{1}{3}\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$. 所以 $-\frac{1}{2}<-\frac{1}{3}\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$. 则满足上述条件的 $2x+\frac{\pi}{3}$ 的最大范围是 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $(b-a)_{\max}<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$，排除 C，D. 则满足上述条件的 $2x+\frac{\pi}{3}$ 的最小范围是 $2k\pi<2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $k\pi-\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $(b-a)_{\min}>\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$. 排除 A，故 $b-a$ 的值可能是 $\frac{\pi}{2}$. 故选 B.

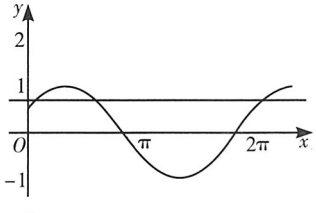
6. A 【解析】由题意函数 $f(x)=t=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$；设 t_1，t_2 是函数 $y=f^2(x)-(m-1)f(x)-m=0$ 的根. 可得 $t_1=-1$，$t_2=m$；函数 $y=f^2(x)-(m-1)f(x)-m$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 3 个零点，当 $t_1=-1$ 时，对于的 x 值只有一个解；那么 $t_2=m$ 对于的 x 值有两个解；所以 $\frac{3}{2}\leqslant t_2<3$，即 $\frac{3}{2}\leqslant m<3$；故选 A.

7. A 【解析】函数 $f(x)=\sin\omega x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上恰有 9 个零点，则 $\frac{\pi}{4}<\frac{5T}{2}=\frac{5}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$，且 $\frac{\pi}{4}\geqslant 2T=2\times\frac{2\pi}{\omega}$，求得 $16\leqslant\omega<20$，故选 A.

8. B 【解析】当 $f(x)$ 取得最值时，$x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}$，依题意得 $\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}\leqslant\pi$，且 $\frac{(k+1)\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}\geqslant 2\pi$，所以 $k+\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant k+\frac{2}{3}$ $\pi<\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}\Rightarrow\omega<1$，显然，$k=0$ 和 $k=1$ 时符合条件，所以 ω 的取值范围为：$\left(0,\frac{1}{6}\right)\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. 故选 B.

9. A 【解析】解法一：令 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-m=0$，则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=m$，因为函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以当 $x\in\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$ 或 $x=\frac{4\pi}{3}$. 因为函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-m$，$x\in\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，所以函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与函数 $y=m$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 上有三个交点，所以由函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与函数 $y=m$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 上的图像知当 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 与函数 $y=m$ 在 $\left[0,\frac{7\pi}{3}\right]$ 上有三个交点时，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{3}$，$\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{4\pi}{3}$，所以 $x_1+2x_2+x_3=\frac{2\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$. 故选 A.

解法二：如图，根据对称原理，易知 $x_1+x_2=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\pi}{3}$，$x_2+x_3=2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8\pi}{3}$，所以 $x_1+2x_2+x_3=\frac{2\pi}{3}+\frac{8\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$. 故选 A.



10. B 【解析】由于 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内不单调，由于 $\frac{0+\frac{\pi}{4}}{\omega}>0$，故只能考虑五点法的第一个周期来进行卡根，即：$1<\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{\omega}<2\Rightarrow\frac{3\pi}{8}<\omega<$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{3\pi}{4}$或$\begin{cases}1<\dfrac{\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}{\omega}<2\\ \dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{\omega}<1\end{cases}\Rightarrow\omega>\frac{7\pi}{8}$，则$\omega$的取值范围为$\left(\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8},+\infty\right)$，故选B.

11. D 【解析】由图像知$A=1$，$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，即$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得$\omega=2$，则$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，则$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$的中点为$x=\frac{-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{12}$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$的中点为$x=\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{7\pi}{12}$，因为$x_1<x_2<x_3$，所以$x_1$，$x_2$关于$x=\frac{\pi}{12}$对称，$x_2$与$x_3$关于$x=\frac{7\pi}{12}$对称，则$x_1+2x_2+x_3=x_1+x_2+x_2+x_3=2\times\frac{\pi}{12}+2\times\frac{7\pi}{12}=\frac{4\pi}{3}$，故选D.

12. A 【解析】函数的最大值为2，则$A=2$，因为相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=2$，则$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，因为$f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$，所以$x=\frac{\pi}{6}$是函数的对称轴，则$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以当$k=0$时，$\varphi=\frac{\pi}{6}$，则$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\partial\right]$时，当$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},2\partial+\frac{\pi}{6}\right]$，令$t=2x+\frac{\pi}{6}$，则$t\in\left[-\frac{\pi}{3},2\partial+\frac{\pi}{6}\right]$，当$t=-\frac{\pi}{3}$时，$f(x)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$，因为当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\partial\right]$时，$f(x)$的值域为$[-\sqrt{3},2]$，所以$\frac{\pi}{2}\leqslant2\partial+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi+\frac{\pi}{3}$，得$\frac{\pi}{6}\leqslant\partial\leqslant\frac{7\pi}{12}$，故选A.

13. B 【解析】函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递增，所以

$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}\geqslant\dfrac{2k\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}\\ \dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{\omega}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，解得：

$\begin{cases}\omega\leqslant\dfrac{8}{3}-8k\\ \omega\leqslant\dfrac{1}{2}+3k\end{cases}$，因为$\omega>0$，当$k=0$时，可得$0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$. 故选B.

14. C 【解析】函数$f(x)=-2\leqslant sin\leqslant(2x+\varphi)$，$|\varphi|<\pi$，可以理解为由于$y=-\sin x$在区间$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$单调递增，所以$\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\leqslant\frac{\pi}{5}$且$\frac{5\pi}{8}\leqslant\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}-\varphi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

解得$2k\pi+\frac{\pi}{10}\leqslant\varphi\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{4}$，因为$|\varphi|<\pi$，令$k=0$，可得$\varphi\in\left[\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right]$，故选C.

15. D 【解析】因为函数$f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\omega>\frac{1}{4},x\in\mathbf{R}\right)$，若$f(x)$的图像的任意一条对称轴与$x$轴的交点的横坐标都不属于区间$(2\pi,3\pi)$，则$f(x)$的半个周期大于或等于$\pi$，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi$，所以$0<\omega\leqslant1$，故有$\frac{1}{4}<\omega\leqslant1$. 求得对称轴为$x=\frac{\left(k+\frac{3}{4}\right)\cdot\pi}{\omega}$，

所以$\begin{cases}\dfrac{\left(k+\frac{3}{4}\right)\pi}{\omega}\leqslant2\pi\\ \dfrac{\left(k+1+\frac{3}{4}\right)\pi}{\omega}\geqslant3\pi\end{cases}$，求得$\frac{k}{2}+\frac{3}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{k}{3}+\frac{7}{12}$. 当$k=-1$时，$-\frac{1}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{4}$，不合题意；当$k=0$时，$\frac{3}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{12}$；当$k=1$时，

获取更多资料加qq群698274639

 获取更多资料加qq群698274639

$\frac{7}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{11}{12}$；当 $k=2$ 时，$\frac{11}{8}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，不合题意，故 ω 的取值范围为 $\left[\frac{3}{8},\frac{7}{12}\right]\cup\left[\frac{7}{8},\frac{11}{12}\right]$，故选 D.

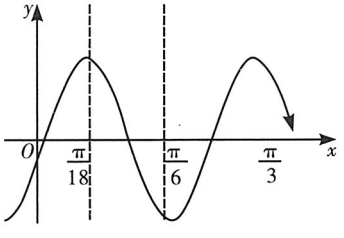
16. D 【解析】函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，其图像与直线 $y=3$ 相邻两个交点的距离为 π，所以 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，若 $f(x)>2$，则 $\sin(2x+\varphi)>\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi-\varphi}{2}<x<\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi-\varphi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；又 $\forall x\in\left(\frac{\pi}{24},\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $k=0$，所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{24}\geqslant\frac{\frac{\pi}{6}-\varphi}{2}\\ \frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\frac{5\pi}{6}-\varphi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{\pi}{12}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}$；所以 φ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$. 故选 D.

17. B 【解析】第一步，边界卡根，确定 ω 的形式，$\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}=\frac{2n-1}{4}T=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=2n-1$；第二步，半周期卡根，由于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ 单调，故 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow\omega\leqslant12$；由于此区间不在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内，三角函数不收到一个周期的限制，故 $\omega=11$ 为 ω 的最大值，故选 B.

18. D 【解析】函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $x=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}$ 为 $f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的一条对称轴，且取得最大值；所以 $\frac{3\pi}{4}=\frac{2k\pi+\frac{\pi}{3}}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\frac{8}{3}k+\frac{4}{9}$，$k\in\mathbf{Z}$，（卡形式），又 $\omega>0$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值，无最小值，所以 $T>\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}>\frac{\pi}{6}$，所以 $\omega<12$，所以当 $k=8$ 时，$\omega=\frac{32}{3}+\frac{4}{9}=\frac{100}{9}$ 为最大值. 故选 D.

19. C 【解析】由题意知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$x=\frac{\pi}{4}$ 为 $y=f(x)$ 图像的对称轴，$x=-\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点，所以 $\frac{2n-1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=2n-1$.（边界卡根，确定 ω 的形式）$f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上有最小值无最大值，所以周期 $T\geqslant\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{8}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{8}$，所以 $\omega\leqslant16$. 要求 ω 的最大值，结合选项，先检验 $\omega=15$，当 $\omega=15$ 时，由题意可得 $-\frac{\pi}{4}\times15+\varphi=k\pi$，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，函数为 $y=f(x)=\sin\left(15x-\frac{\pi}{4}\right)$，在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{24}\right)$ 上，$15x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{8}\right)$，此时 $f(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{60}$ 时取得最小值，所以 $\omega=15$ 满足题意. 则 ω 的最大值为 15，故选 C.

20. B 【解析】因为 $y=f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调，所以函数的周期 $T\geqslant2\times\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{18}\right)=2\times\frac{2\pi}{18}=\frac{2\pi}{9}$，即 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{2\pi}{9}$，则 $0<\omega\leqslant9$，因为 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 是 $y=f(x)$ 的一个对称中心，故 $\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}=\frac{2n-1}{4}T\Rightarrow\omega=2n-1$；如图所示，$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{T}{2}\Rightarrow\omega\geqslant6$，$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{18}=\frac{5\pi}{18}\leqslant T\Rightarrow\omega\leqslant7.2$，得 $\omega=7$，故选 B.



 获取更多资料加qq群698274639

21. B 【解析】解法一：由题意知，

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi \\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases}，k_1，k_2\in\mathbf{Z}，则$$

$$\begin{cases} \omega=\frac{3(2k+1)}{4} \\ \varphi=\frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases}，k，k'\in\mathbf{Z}，其中 k=k_2-k_1，$$

$k'=k_2+k_1=k+2k_1$，故 k 与 k' 同为奇数或同为偶数. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大，且要求 ω 最大，则 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 包含的周期应该最多，所以 $\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}=\frac{2\pi}{15}\leqslant 2T$，得 $0<\omega\leqslant 30$，即 $\frac{3(2k+1)}{4}\leqslant 30$，所以 $k\leqslant 19.5$. 当 $k=19$ 时，$\omega=\frac{117}{4}$，k' 为奇数，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，此时 $\frac{117}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.7\pi,6.6\pi)$，当 $\frac{117}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$ 或 6.5π 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；当 $k=18$ 时，$\omega=\frac{111}{4}$，k' 为偶数，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $\frac{111}{4}x+\frac{\pi}{4}\in(2.1\pi,5.8\pi)$，当 $\frac{111}{4}x_1+\frac{\pi}{4}=2.5\pi$ 或 4.5π 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；当 $k=17$ 时，$\omega=\frac{105}{4}$，k' 为奇数，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，此时 $\frac{105}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.5\pi,6\pi)$，当且仅当 $\frac{105}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=4.5\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 成立. 综上所述，ω 的最大值为 $\frac{105}{4}$. 故选 B.

解法二：第一步，边界卡根，确定 ω 的形式，$\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}=\frac{2n-1}{4}T=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{\omega}\Rightarrow\omega=\frac{6n-3}{4}$；第二步，周期卡根，由于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 有仅有一个最大值，故 $T<\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}\Rightarrow\omega>15$；排除 A；同时根据图 1 可得 $2T\geqslant\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\Rightarrow\omega\leqslant 30$，再根据图 2，$\frac{3T}{2}<\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\Rightarrow\omega>\frac{45}{2}$，且 $\frac{7}{2}T\geqslant\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}\Rightarrow\omega\leqslant\frac{105}{4}$，故选 B.

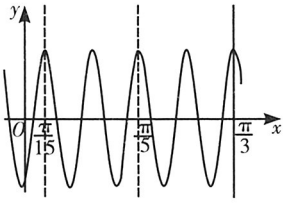


图 1

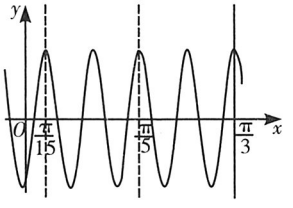


图 2

22. A 【解析】由 $f\left(-\frac{\pi}{4}+x\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=0$，$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$，得函数关于 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称，关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，若 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3\pi}{16}\right)$ 上单调，则 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{3\pi}{16}$，即 $T\geqslant\frac{3\pi}{8}$，得 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{3\pi}{8}$ 得 $0<\omega\leqslant\frac{16}{3}$，对称轴和对称点之间的距离为 $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$，若 $\frac{(2n-1)T}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\omega=2n-1$，当 $\omega=1$ 时，$f(x)=A\cos(x+\varphi)$，因为关于 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=A\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，满足在 $\left(0,\frac{3\pi}{16}\right)$ 上单调，若 $\omega=3$，此时 $f(x)=A\cos(3x+\varphi)$，因为关于 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称，所以 $3\times\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{4}$，因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$ 时，$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=A\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$，此时在 $\left(0,\frac{3\pi}{16}\right)$ 上不单调，不满足条件. 故 $\omega=3$ 不成立，即 $\omega=1$，故选 A.

23. 【解析】函数 $f(x)=\cos\omega x+\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=$

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{3}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，（$\omega>0$）；由 $x\in[0,\pi]$，得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$；又$f(x)$在$[0,\pi]$上恰有一个最大值点和两个零点，则 $2\pi\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$，解得 $\frac{5}{3}\leqslant\omega<\frac{13}{6}$，所以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$，故答案为$\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$.

24. 【解析】函数$f(x)=\cos(2x+\varphi)$，满足函数 $y=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$是奇函数，且当$|\varphi|$取最小值时，$-\frac{\pi}{6}+\varphi=-\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. 因为函数$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{a}{2}\right]$和$\left[3a,\frac{7\pi}{6}\right]$上均单调递增，所以 $\begin{cases}2\cdot\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant0\\ \pi\leqslant2\cdot3a-\frac{\pi}{3}<2\cdot\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求得$\frac{2\pi}{9}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{3}$. 则实数 a 的范围为$\left[\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{3}\right]$. 故答案为$\left[\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{3}\right]$.

25. 【解析】函数$f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\omega x)+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin\omega x-\cos\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，$\omega>0$；$f(x)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有极值点，所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{4}<2\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，或 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{4}<2\omega\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；解得 $2k-\frac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant k+\frac{3}{8}$，或 $2k+\frac{3}{4}\leqslant\omega\leqslant k+\frac{7}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$；令 $k=0$，得 $\omega\in\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right]$或$\omega\in\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$；又$\omega>0$，所以$\omega$取值范围是$\left(0,\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$. 故答案为 $\left(0,\frac{3}{8}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$.

专题5　周期函数

达标训练

1. D　【解析】因为当 $x>\frac{1}{2}$是时，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$，所以$f(x)=f(x+1)$，所以当 $x>\frac{1}{2}$时，$f(x)$的周期 $T=1$，又当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$；当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(-x)=-f(x)$；所以$f(2019)=f(1)=-f(-1)=-(-1)^3-1=2$. 故选 D.

2. D　【解析】由$f(x+2)=-f(x)$，得$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即函数的周期是 4，则 $f(5.5)=f(1.5)=-1$，$f(-1)=1$，即 $f(f(5.5))=1$，$f(f(4.5))=f(f(0.5))=f(-1)=1$，$f(3.5)=f(-0.5)=1$，$f(6)=f(2)=-1$，故选 D.

3. D　【解析】因为$f(x+3)=-f(x)$，所以$f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为 6，所以 $f(2019)=f(3)$，又$f(3)=-f(0)=-2$，所以 $f(2019)=-2$. 故选 D.

4. D　【解析】函数$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且$f(x)=f(x-3)$，得函数周期为 3，所以$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2018)=672\times[f(1)+f(2)+f(3)]+f(1)+f(2)$，因为$f(1)=f(-2)=1$，$f(2)=f(-1)=0$，$f(3)=f(0)=1$，带入上式，得$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2018)=672\times[f(1)+f(2)+f(3)]+f(1)+f(2)=1345$. 故选 D.

5. A　【解析】由$f(x+1)=-f(x-1)$，可得$f(x+2)=-f(x)$，则$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数 $f(x)$的周期为 4，则$f(5)=f(1)=a^2-2a-4$，又因为函数$f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f(-1)>1$，所以$f(1)<-1$. 所以 $a^2-2a-4<-1$，解得 $-1<a<3$. 所以实数 a 的取值范围是$(-1,3)$. 故选 A.

6. B　【解析】函数$f(x)(x\in\boldsymbol{R})$的周期为 $T(T>0)$，但是 $x^2\geqslant0$，所以函数的定义域变小，故$f(x^2)$不是周期函数. 且在$(0,T)$上单调，故 $0<x^2<T$，解得 $0<x<\sqrt{T}$，故在$(0,\sqrt{T})$上单调. 故

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

选 B.

7. B 【解析】因为$f(x)$为 **R** 上的奇函数，且满足$f(x+4)=-f(x)$，所以$f(x)$是以 8 为周期的函数，所以$f(8)=f(0)$，$f(11)=f(3)=-f(-1)=f(1)$，$f(15)=f(7)=f(-1)$，又$f(x)$在区间$[0,2]$上单调递减，所以$f(-1)>f(0)>f(1)$，即$f(15)>f(8)>f(11)$. 故选 B.

8. A 【解析】因为$(x+2)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为 2，所以当$x\in[-1,1]$时，$f(x)=2-|x|=\begin{cases}2-x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2+x, & -1\leqslant x<0\end{cases}$，所以$f(x)$在$[-1,1]$上是偶函数，且在$[-1,0]$上单调递增，在$[0,1]$上单调递减，因为$1>\cos\frac{\pi}{6}>\sin\frac{\pi}{6}>0$，所以$f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 错误；因为$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$，所以$1>\sin1>\cos1>0$，所以$f(\sin1)<f(\cos1)$，故 B 正确；因为$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$f\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)>f\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，故 C 正确；因为$\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{4}$，所以$1>\sin2>|\cos2|>0$，所以$f(\sin2)<f(\cos2)$，故 D 正确. 故选 A.

9. A 【解析】$f(x)$在 **R** 上是奇函数，且满足$f(x+4)=f(x)$，可得函数的周期为 4，$f(2019)=f(2016+3)=f(3)=f(-1)=-f(1)$. 当$x\in(0,2)$时，$f(x)=2x^2$，$f(2019)=-f(1)=-2\times1^2=-2$. 故选 A.

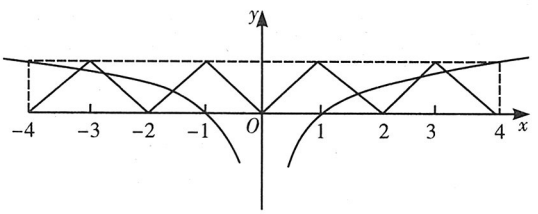
10. A 【解析】由定义在 **R** 上的函数$f(x)$的最小正周期等于T，得：在 A 中，$f(2x)$的最小正周期为：$\frac{T}{2}$，故 A 正确；在 B 中，$f\left(\frac{x}{2}\right)$的最小正周期为：$\frac{T}{\frac{1}{2}}=2T$，故 B 错误；在 C 中，$2f(x)$的最小正周期为$T$，故 C 错误；在 D 中，$f(x^2)$不一定是周期函数，故 D 错误. 故选 A.

11. B 【解析】因为$f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$，故有$f(x+6)=-\frac{1}{f(x+3)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x)$. 函数$f(x)$是以 6 为周期的函数. $f(107.5)=f(6\times17+5.5)=f(5.5)=-\frac{1}{f(2.5)}=-\frac{1}{f(-2.5)}=-\frac{1}{4\times(-2.5)}=\frac{1}{10}$. 故选 B.

12. D 【解析】因为当$x\in(0,1.5)$时$f(x)=\ln(x^2-x+1)$，令$f(x)=0$，则$x^2-x+1=1$，解得$x=1$. 又因为函数$f(x)$是定义域为 **R** 的奇函数，所以在区间$\in[-1.5,1.5]$上，$f(-1)=f(1)=0$，$f(0)=0$，$f(1.5)=f(-1.5+3)=f(-1.5)=-f(1.5)$，所以$f(-1)=f(1)=f(0)=f(1.5)=f(-1.5)=0$，又因为函数$f(x)$是周期为 3 的周期函数，则方程$f(x)=0$在区间$[0,6]$上的解有 0，1，1.5，2，3，4，4.5，5，6，共 9 个，故选 D.

13. B 【解析】由题意$f(x)$是定义在 **R** 上周期为 2 的函数，$f(x)-f(-x)=0$，可得$f(x)$是偶函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=-\sqrt{1-x^2}$，其值域为$[-1,0]$，两边平方：可得$x^2+y^2=1$，$(0\leqslant x\leqslant1,\ -1\leqslant y\leqslant0)$，可得$f(x)$图像为：以原点为圆心，半径为 1，$x$ 轴的下半圆. 看作是两个函数图像的交点问题，即$y=f(x)+1$与函数$y=e^x$，$x\in[-2018,0]$，图像在左边有 2018 交点. $x\in[0,2018]$在右边图像没有交点. 函数$g(x)=f(x)-e^x+1$在区间$[-2018,2018]$上零点的个数为 2018. 故选 B.

14. D 【解析】因为偶函数$f(x)$满足$f(x+2)=f(x)$，故函数的周期为 2. 当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，故当$x\in[-1,0]$时，$f(x)=-x$. 函数$y=f(x)-\log_4|x|$的零点的个数等于函数$y=f(x)$的图像与函数$y=\log_4|x|$的图像的交点个数. 在同一个坐标系中画出函数$y=f(x)$的图像与函数$y=\log_4|x|$的图像，如图所示：显然函数$y=f(x)$的图像与函数$y=\log_4|x|$的图像有 6 个交点，故选 D.

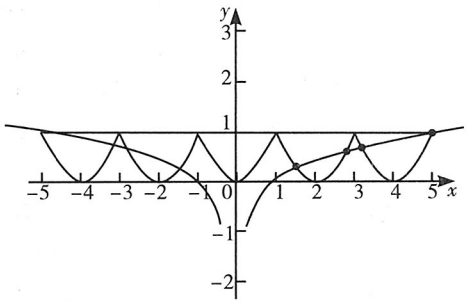


15. B 【解析】因为函数$f(x)$是定义在 **R** 上的周期

获取更多资料加qq群698274639

为2的奇函数，所以$f(1)=f(-1)$，所以$-f(1)=f(-1)=f(1)$，所以$f(1)=f(-1)=0$，所以$f(2017)=f(1)=0$. 故选B.

16. D 【解析】当$x\in[0,1]$时，$f(x)=2^x-1$，函数$y=f(x)$的周期为2，$x\in[-1,0]$时，$f(x)=2^{-x}-1$，可作出函数的图像；图像关于y轴对称的偶函数$y=\log_5|x|$. 函数$y=g(x)$的零点，即为函数图像交点横坐标，当$x>5$时，$y=\log_5|x|>1$，此时函数图像无交点，如图：



又两函数在$x>0$上有4个交点，由对称性知它们在$x<0$上也有4个交点，且它们关于直线y轴对称，可得函数$g(x)=f(x)-\log_5|x|$的零点个数为8；故选D.

17. D 【解析】由$f(x-y)=\dfrac{f(x)\cdot f(y)+1}{f(y)-f(x)}$成立，且$f(a)=1$，可得$f(2a)=f(a+a)=f[a-(-a)]=\dfrac{f(a)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(a)}=\dfrac{1-f^2(a)}{-2f(a)}=0$，$f(3a)=f(2a+a)=f[2a-(-a)]=\dfrac{f(2a)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(2a)}=\dfrac{1}{-f(a)}=-1$，故A不正确. 因为定义域$\{x\mid x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$关于原点对称，$f(a)=1$，又$f(-x)=f[(a-x)-a]=\dfrac{f(a-x)\cdot f(a)+1}{f(a)-f(a-x)}=\dfrac{f(a-x)+1}{1-f(a-x)}=\dfrac{1+\dfrac{f(a)\cdot f(x)+1}{f(x)-f(a)}}{1-\dfrac{f(a)\cdot f(x)+1}{f(x)-f(a)}}=\dfrac{2f(x)}{-2}=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数，故B不正确. 由于$f(x-a)=\dfrac{f(x)\cdot f(a)+1}{f(a)-f(x)}=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{1+f(x+a-a)}{1-f(x+a-a)}=\dfrac{1+\dfrac{f(x+a)\cdot f(a)+1}{f(a)-f(x+a)}}{1-\dfrac{f(x+a)\cdot f(x)}{f(a)-f(x+a)}}=-\dfrac{1}{f(x+a)}$，所以$f(x)=\dfrac{-1}{f(x+2a)}=f(x+4a)$，故函数$f(x)$为周期性等于$4a$的周期函数，故D正确. 先证明$f(x)$在$[2a,3a]$上单调递减，由题意可得必须证明$x\in(2a,3a)$时，$f(x)<0$. 设$2a<x<3a$，则$0<x-2a<a$，所以$f(x-2a)=\dfrac{f(2a)\cdot f(x)+1}{f(2a)-f(2x)}=\dfrac{1}{-f(x)}>0$，所以$f(x)<0$设$2a<x_1<x_2<3a$，则$0<x_2-x_1<a$，所以$f(x_1)<0$ $f(x_2)<0$，$f(x_2-x_1)>0$，所以$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2-x_1)}>0$，所以$f(x_1)>f(x_2)$，所以$f(x)$在$[2a,3a]$上单调递减，故C不正确. 故选D.

18. 【解析】因为函数$f(x)$周期为1，所以$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，因为当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=-\log_2 x$，所以$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$. 故答案为1.

19. 【解析】因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(x+2)=f(x)$. 所以当$x=-1$时，$f(-1+2)=f(-1)=f(1)$，即$-f(1)=f(1)$，则$f(1)=0$，因为当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=x^3-ax+1$. 所以$f(1)=1-a+1=0$，得$a=2$. 故答案为2.

20. 【解析】因为函数$f(x)$以5为周期，所以$f(2)=f(-3)$，又因为$f(3)=\dfrac{a^2+a+3}{a-3}$，函数是奇函数 所以$f(-3)=-f(3)=-\dfrac{a^2+a+3}{a-3}$，因此，$f(2)=-\dfrac{a^2+a+3}{a-3}>1$，解之得$0<a<3$或$a<-2$. 故答案为$(-\infty,-2)\cup(0,3)$

21. 【解析】由$f(x+1)=f(x-1)$，得$f(x+2)=f(x)$，所以$f(x)$是以2为周期的周期函数，又$f(x)$为偶函数，所以$f(\log_{\frac{1}{3}}5)=f(-\log_3 5)=f(\log_3 5)=f(\log_3 5-2)=f\left(\log_3\dfrac{5}{9}\right)=3^{\log_3\frac{5}{9}}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{9}=1$. 故答案为1.

22. 【解析】对于任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x+6)=f(x)+f(3)$成立，令$x=-3$，则$f(-3+6)=f(-3)+f(3)$，即$f(-3)=0$，又因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，所以$f(3)=0$，则$f(x+6)=f(x)+f(3)=f(x)$，即函数$f(x)$是周期为6的周期函数. ①$f(2018)=f(336\times 6+2)=f(2)$，因为

获取更多资料加qq群698274639

$f(-4)=-2$，所以$f(-4+6)=f(-4)=-2$，即$f(2)=-2$，即$f(2018)=-2$，正确；②由(1)知$f(x+6)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为6，又因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，所以$f(x+6)=f(-x)$，而$f(x)$的周期为6，所以$f(x+6)=f(-6+x)$，$f(-x)=f(-x-6)$，即$f(-6-x)=f(-6+x)$，即直线$x=-6$是函数$y=f(x)$的图像的一条对称轴，即②正确；③当x_1，$x_2\in[0,3]$，且$x_1\neq x_2$时，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则函数$y=f(x)$在$[0,3]$上为增函数，因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，所以函数$y=f(x)$在$[-3,0]$上为减函数，而$f(x)$的周期为6，所以函数$y=f(x)$在$[-9,-6]$上为减函数，故③不正确；④$f(3)=0$，$f(x)$的周期为6，函数$y=f(x)$在$[0,3]$上为增函数，在$[3,6]$上为减函数，所以$y=f(x)$在$[0,6]$上只有一个零点3，所以$f(3+6)=f(9)=0$，则$f(-3)=f(3)=0$，$f(-9)=f(9)=0$，所以，函数$y=f(x)$在$[-9,9]$上有4个零点，故④正确. 故答案为①②④.

23. 【解析】(1)由函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且对任意的$x\in\mathbf{R}$恒有$f(x+1)=f(x-1)$，取$x=x+1$则$f(x+1+1)=f(x+1-1)=f(x)$，即$f(x+2)=f(x)$，所以2是函数$f(x)$的周期，所以(1)正确；(2)因为当$x\in[0,1]$时，$f(x)=2^{x-1}$为增函数，又因为函数$f(x)$的周期是2，所以函数在$[2,3]$上的图像与在$[0,1]$上的图像完全相同，所以函数$f(x)$在$(2,3)$上是增函数，所以(2)正确；(3)因为当$x\in[0,1]$时，$f(x)=2^{x-1}$为增函数，且函数$f(x)$为偶函数，所以在$[-1,1]$上函数的最小值为$f(0)=\frac{1}{2}$，再由函数图像以2为周期周期出现，所以函数$f(x)$的最小值是$\frac{1}{2}$，所以(3)不正确；(4)由函数$f(x)$的周期是2，且函数$f(x)$是偶函数，所以$f(4+x)=f(x)=f(-x)$，所以函数的一条对称轴是$x=2$，所以(4)正确. 故答案为(1)(2)(4).

24. 【解析】函数$y=f(x)$满足$f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，$x\in\mathbf{R}$，可得$f(x+2a)=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{2}{-2f(x)}=-\frac{1}{f(x)}$，即有$f(x+4a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$，则函数$y=f(x)$的最小正周期为$4|a|$. 故答案为$4|a|$.

25. 【解析】由题意知，定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$有$f(x+2)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$，则令$x=x+2$代入得，所以$f(x+4)=\frac{1-f(x+2)}{1+f(x+2)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$，所以函数$f(x)$是周期函数且$T=4$，所以$f(2019)=f(4\times504+3)=f(3)$，因为当$x\in(0,4)$时，$f(x)=x^2-1$，所以$f(3)=8$. 即$f(2019)=8$. 故答案为8.

26. 【解析】因为函数$f(x)$对定义域内任意x，y，有$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，所以令$x=y=0$，得$f(0)=\frac{2f(0)}{1-[f(0)]^2}$，解得$f(0)=0$. 令$y=-x$，得$f(0)=\frac{f(x)+f(-x)}{1-f(x)f(-x)}=0$，所以$f(-x)=-f(x)$，即函数$f(x)$是奇函数. 因为$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，所以$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，所以$f(x+2)=\frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$，所以$f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，所以$f(x)$是以4为周期的周期函数，因为$f(1)=1$，所以$f(2019)=f(505\times4-1)=f(-1)=-f(1)=-1$. 故答案为$-1$.

27. 【解析】因为$f(1)=2$，$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$，所以$f(2)=\frac{1+2}{1-2}=-3$，$f(3)=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$，$f(4)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，$f(5)=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$. 所以$f(x)$是周期为4的周期函数. 因为2018=

获取更多资料加qq群698274639

$504\times4+2$，所以$f(2018)=f(2)=-3$. 故答案为-3.

28. 【解析】因为定义域为$\mathbf{R}$的偶函数$f(x)$为周期函数，其周期为8，当$x\in[-4,0]$时，$f(x)=x+1$，所以$f(25)=f(8\times3+1)=f(1)=f(-1)=-1+1=0$. 故答案为0.

29. 【解析】因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的周期为2的函数，所以$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2=1$. 故答案为1.

30. 【解析】因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上且周期为2的函数，$f(x)=\begin{cases}ax+1, & -1\leqslant x<0\\ \frac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant1\end{cases}$，所以$f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}a$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{b+4}{3}$；又$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)$，所以$1-\frac{1}{2}a=\frac{b+4}{3}$① 又$f(-1)=f(1)$，所以$2a+b=0$②，由①②解得$a=2$，$b=-4$；所以$a+3b=-10$. 故答案为$-10$.

31. 【解析】(1)因为$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)=a$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=\pm\sqrt{a}$，又因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f^2\left(\frac{1}{4}\right)>0$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}$同理可得$f\left(\frac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}$；(2)因为$f(x)$是偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，又因为$f(x)$关于$x=1$对称，所以$f(x)=f(2-x)$，所以$f(x)=f(-x)=f[2-(-x)]=f(2+x)\cdot(x\in\mathbf{R})$，这表明$f(x)$是$\mathbf{R}$上的周期函数，且2是它的一个周期.

32. 【解析】(1)$f(1-2x)-f(x)=\lg(1-2x+1)-\lg(x+1)=\lg(2-2x)-\lg(x+1)$，要使函数有意义，则由$\begin{cases}2-2x>0\\ x+1>0\end{cases}$解得：$-1<x<1$. 由$0<\lg(2-2x)-\lg(x+1)=\lg\frac{2-2x}{x+1}<1$得：$1<\frac{2-2x}{x+1}<10$，因为$x+1>0$，所以$x+1<2-2x<10x+10$，所以$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$. 由$\begin{cases}-1<x<1\\ -\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}\end{cases}$，得：$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{3}$；(2)当$x\in[1,2]$时，$2-x\in[0,1]$，所以$y=g(x)=g(x-2)=g(2-x)=f(2-x)=\lg(3-x)$，由单调性可知$y\in[0,\lg2]$，又因为$x=3-10^y$，所以所求反函数是$y=3-10^x$，$x\in[0,\lg2]$.

33. 【解析】(1)由$\begin{cases}f(2-x)=f(2+x)\\ f(7-x)=f(7+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=f(4-x)\\ f(x)=f(14-x)\end{cases}\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow f(x)=f(x+10)$，又$f(3)=0$，而$f(7)\neq0$，$\Rightarrow f(-3)=f(7)\neq0\Rightarrow f(-3)\neq f(3)$，$f(-3)\neq-f(3)$. 故函数$y=f(x)$是非奇非偶函数；(2)由$\begin{cases}f(2-x)=f(2+x)\\ f(7-x)=f(7+x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)=f(4-x)\\ f(x)=f(14-x)\end{cases}\Rightarrow f(4-x)=f(14-x)\Rightarrow f(x)=f(x+10)$，又$f(3)=f(1)=0\Rightarrow f(11)=f(13)=f(-7)=f(-9)=0$，因为在闭区间$[0,7]$上，只有$f(1)=f(3)=0$，故在$[4,7]$上无零点，又$f(7-x)=f(7+x)$，故在$[4,10]$上无零点，故在$[0,10]$上仅有两个解，故$f(x)$在$[0,10]$和$[-10,0]$上均有有两个解，从而可知函数$y=f(x)$在$[0,2005]$上有402个解，在$[-2005.0]$上有400个解，所以函数$y=f(x)$在$[-2005,2005]$上有802个解.

专题6　三角恒等变形求值

达标训练1

1. A　**2.** D　**3.** C　**4.** C　**5.** A　**6.** A　**7.** A

8. C　**9.** D　**10.** $-\frac{\sqrt{14}}{2}$　**11.** $\sqrt{3}$

12. 8　【解析】$\sin A=2\sin B\sin C\Rightarrow\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C\Rightarrow\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\frac{2\sin B\sin C}{\cos B\cos C}\Rightarrow\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，因为$\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C=\tan A+2\tan B\tan C\geqslant2\sqrt{\tan A\cdot2\tan B\tan C}$，所以$\tan A\tan B\tan C\geqslant2\sqrt{2}\sqrt{\tan A\tan B\tan C}\Rightarrow\sqrt{\tan A\tan B\tan C}\geqslant2\sqrt{2}$，故$\tan A\tan B\tan C\geqslant8$

13. $\frac{16+26\sqrt{13}}{39}$

【解析】$f(x)=2\left[\sin x\cos x+\sin x+\frac{2\sqrt{13}-5}{3\sqrt{13}}\cos x\right]$

获取更多资料加qq群698274639

$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，$m=1$，$n=\frac{2\sqrt{13}-5}{3\sqrt{13}}$，取得最值时$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1+\cos x}{\frac{2\sqrt{13}-5}{3\sqrt{13}}+\sin x}$，按照必要探路法，$|\sin x|>|\cos x|$，求最大值时取正号，$\begin{cases}\sin x=\frac{3}{\sqrt{13}}\\ \cos x=\frac{2}{\sqrt{13}}\end{cases}$，满足最值的式子，此时求得最大值为$\frac{16+26\sqrt{3}}{39}$.

14. $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ 【解析】由$f(x)=(\sin 2x+2\cos x)+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x+\cos x=2\cos x(1+\sin x)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，两个函数在$x=\frac{\pi}{6}$时同时取得最大值，故最大值为$\frac{13\sqrt{3}}{6}$.

15. 【解析】(1)因为$C=\pi-(A+B)$，所以$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}=-1$，又因为$0<C<\pi$，所以$C=\frac{3\pi}{4}$；(2)由$\begin{cases}\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{4}\\ \sin^2+\cos^2 A=1\end{cases}$，且$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得$\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. 因为$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，所以$BC=AB\cdot\frac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{2}$.

16. 【解析】(1)因为$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1$，所以$(-1,\sqrt{3})\cdot(\cos A,\sin A)=1$，即$\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\left(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos A\cdot\frac{1}{2}\right)=1$，$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，因为$0<A<\pi$，$-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，所以$A=\frac{\pi}{3}$；(2)由题知$\frac{1+2\sin B\cos B}{\cos^2 B-\sin^2 B}=-3$，整理得$\sin^2 B-\sin B\cos B-2\cos^2 B=0$，所以$\cos B\neq 0$，所以$\tan^2 B-\tan B-2=0$，所以$\tan B=2$或$\tan B=-1$，而$\tan B=-1$使$\cos^2 B-\sin^2 B=0$，舍去，所以$\tan B=2$，所以$\tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}=\frac{8+5\sqrt{3}}{11}$.

达标训练 2

1. D **2.** B **3.** C **4.** C **5.** C **6.** D **7.** D **8.** D **9.** A **10.** C **11.** C **12.** D **13.** D **14.** B **15.** $\left(-\frac{1}{2},1\right]$ **16.** $\frac{1}{2}$ **17.** 1 **18.** -4 **19.** $-\sqrt{3}$ **20.** 1 **21.** 4 **22.** $\sqrt{3}$

第2章 八仙过海显神通 平面向量无敌路

专题1 向量的基础知识

达标训练

1. B **2.** A **3.** A **4.** D **5.** B **6.** A **7.** C **8.** D **9.** A **10.** A **11.** B **12.** $\frac{1}{2}$ **13.** -1 **14.** -3 **15.** 3 **16.** -3 **17.** 2 **18.** 7 **19.** $2\sqrt{3}$ **20.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **21.** $[-5\sqrt{2},1]$ **22.** 6 **23.** -6 **24.** -2 **25.** -5 **26.** $-\frac{2}{3}$ **27.** $\frac{1}{2}$

专题2 共线向量之对面的女孩看过来

达标训练

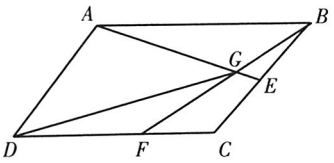
1. A 【解析】$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BA}-\frac{4}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\right]+\overrightarrow{AB}=\frac{9}{10}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，故选A.

2. B 【解析】因为$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，所以$\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=1$，即$\lambda\mu=\frac{1}{2}$，故选B.

3. A 【解析】在$\triangle ABC$中，点D满足$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，点$M$为$AC$中点，所以$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
故选A.

4. B 【解析】因为E为BC的中点，点F在CD上，且$DF=2FC$，连接AE，BF交于G点，如图所示，

获取更多资料加qq群698274639

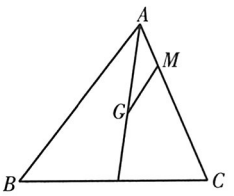


所以存在实数 m，n 使得$\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FG}=n\overrightarrow{FB}$，所以$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AD}+m\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}+m(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=-\overrightarrow{AD}+m\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\left(\frac{1}{2}m-1\right)\overrightarrow{AD}+m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+n(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+n\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=-n\overrightarrow{AD}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)\overrightarrow{AB}$，所以$\begin{cases}\frac{1}{2}m-1=-n\\ m=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\end{cases}$，所以$\begin{cases}m=\frac{6}{7}\\ n=\frac{4}{7}\end{cases}$，所以$\overrightarrow{DG}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{7}\overrightarrow{AD}$，故选 B.

5. C 【解析】因为 D 是△ABC 的边 AB 的中点，则向量$\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{2}(2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，故选 C.

6. D 【解析】因为$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，故选 D.

7. B 【解析】由题意，画出几何图形如图所示：$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}$；因为 G 为△ABC 的重心，M 满足$\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{AM}$；所以$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$；所以$\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$. 故选 B.



8. D 【解答】依题意，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}$. 故选 D.

专题 3　等高线定理的运用

达标训练 1

1. C 【解析】解法一：如图 1 所以，由重心的定义可知：$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以$\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. 所以 $x+y=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. 故选 C.

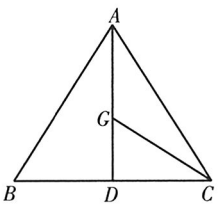


图 1

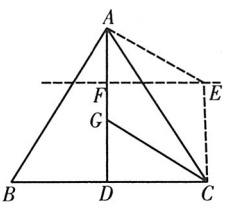


图 2

解法二：如图 2 所示，作 $AE/\!/CG$，且 $AE=CG$，根据等高线知识和重心定理可得 $x+y=\frac{|AF|}{|AD|}=\frac{1}{3}$，故选 C.

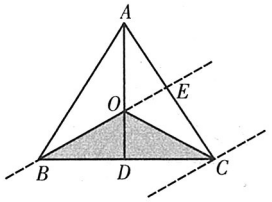
2. B 【解析】因为△ABC 内一点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，所以 O 为△ABC 的重心.

解法一：又 M 在△OBC 内(不含边界)，且当 M 与 O 重合时，$\lambda+2\mu$ 最小，此时$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\times\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$，即 $\lambda+2\mu=1$，当 M 与 C 重合时，$\lambda+2\mu$ 最大，此时$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=0$，$\mu=1$，即 $\lambda+2\mu=2$，因为 M 在△OBC 内且不含边界，所以取开区间，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$，故选 B.

解法二：M 在△OBC 内(不含边界)，如图的阴

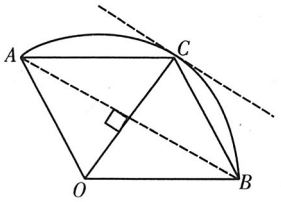
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639



影部分，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AE}$，根据等高线原理易知，$M$ 在 OB 边上时，$\lambda+2\mu=1$，M 在 C 点时，$\lambda+2\mu=2$，即 $\lambda+2\mu\in(1,2)$，故选 B.

3. D 【解析】解法一：设半径为 1，由已知可设 OB 为 x 轴的正半轴，O 为坐标原点，建立直角坐标系，其中 $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(1,0)$，$C(\cos\theta,\sin\theta)$（其中 $\angle BOC=\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$，有 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$（$\lambda,\mu\in\mathbf{R}$），即 $(\cos\theta,\sin\theta)=\lambda\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mu(1,0)$，整理得：$-\frac{1}{2}\lambda+\mu=\cos\theta$，$\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=\sin\theta$，解得 $\lambda=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$，$\mu=\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$，则 $\lambda+\mu=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，其中 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$，易知 $\lambda+\mu=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 为增函数，由单调性易得具值域为 $[1,2]$，故选 D.



解法二：等高线法，如图，连接 AB，当 C 位于 A 或者 B 点时，$(\lambda+\mu)_{\min}=1$，当 C 位于 $\overset{\frown}{AB}$ 中点 C_0 时，根据菱形的对角线性质可得：$(\lambda+\mu)_{\max}=2$，则 $\lambda+\mu$ 的取值范围为 $[1,2]$，故选 D.

4. A 【解析】解法一：如图 1 所示，建立直角坐标系. $A(1,0)$，$B(0,1)$. $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=(x,y)$，设 $C(\cos\alpha,\sin\alpha)\left(\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. 则 $3x+5y=3\cos\alpha+5\sin\alpha=\sqrt{34}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{34}}$，$\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{34}}$. 所以 $3x+5y\leqslant\sqrt{34}$，当且仅当 $\sin(\alpha+\varphi)=1$ 时取等号. 故选 A.

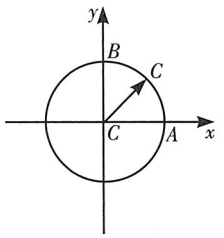


图 1

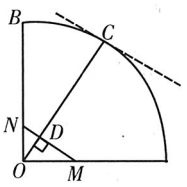


图 2

解法二：如图 2 所示，分别取 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=3x\overrightarrow{OM}+5y\overrightarrow{ON}$，根据等高线知识可得：$3x+5y=\frac{|OC|}{|OD|}$，故当 OD 取得最小值，即 $OD\perp MN$ 时，此时 $|OD|=\frac{|OM|\cdot|ON|}{|MN|}=\frac{1}{\sqrt{34}}$，故 $(3x+5y)_{\max}=\sqrt{34}$. 故选 A.

5. C 【解析】解法一：如图 1，以 D 为原点，BC，AD 所在的直线为 x，y 轴建立如图所示的直角坐标系，则 $A(0,3)$，$B(-\sqrt{3},0)$，$D(0,0)$，所以 $\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},0)$，因为圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的内切圆，所以圆 O 的方程为：$x^2+(y-1)^2=1$，设点 M 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta+1)$，因为 $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}$（$x,y\in\mathbf{R}$），所以 $(\cos\theta+\sqrt{3},\sin\theta+1)=x(\sqrt{3},3)+y(\sqrt{3},0)$，所以 $\begin{cases}\cos\theta+\sqrt{3}=\sqrt{3}x+\sqrt{3}y\\ \sin\theta+1=3x\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x=\frac{\sin\theta+1}{3}\\ y=\frac{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+2}{3}\end{cases}$，所以 $2x+y=\frac{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta+4}{3}=\frac{2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+4}{3}$，所以当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，$2x+y$ 的最大值为 2. 故选 C.

获取更多资料加qq群698274639

 获取更多资料加qq群698274639

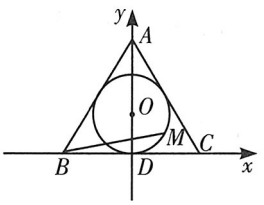


图 1

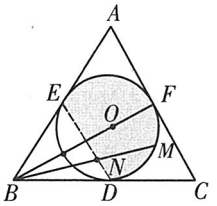
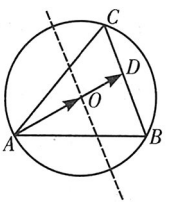


图 2

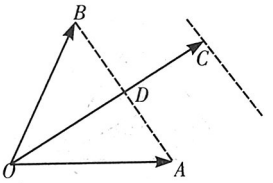
解法二：如图 2，$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}=2x\overrightarrow{BE}+y\overrightarrow{BD}(x,\ y\in R)$，故根据等高线知识 $2x+y=\frac{|BM|}{|BN|}$，显然当 M 位于 AC 中点 F 时，$(2x+y)_{max}=\frac{|BC|}{|BD|}=2$，故选 C.

6. A 【解析】由题意可知，O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，如图所示，在圆 O 中，弧 CAB 所对的圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$，点 A，B 为定点，点 C 为优弧上的动点，则点 A，B，C，O 满足题中的已知条件，延长 AO 交 BC 于点 D，设 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}$，根据等高线知识，则 $m+n$ 的最大值即 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AD}|}$ 的最大值，由于 $|\overrightarrow{AO}|$ 为定值，故 $|\overrightarrow{AD}|$ 最小时，$m+n$ 取得最大值，由几何关系易知当 $AB=AC$ 是，$|\overrightarrow{AD}|$ 取得最小值，此时 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AD}|}=\frac{2}{3}$. 故选 A.



7. B 【解析】解法一：由题意可得，$\overrightarrow{OC}$ 在 $\angle AOB$ 的角平分线上，所以 $\overrightarrow{OC}=k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. 再由 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 可得 $\lambda=\mu$，即 $\overrightarrow{OC}=\lambda\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$. 再由 $|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，可得 $2\sqrt{3}=\sqrt{\lambda^2\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2}=\sqrt{\lambda^2(1+2\times1\times1\cos60°+1)}$，

解得 $\lambda=2$，故 $\mu=2$，故 $\lambda+\mu=4$. 故选 B.



解法二：如图，连接 AB 交 OC 于点 D，易知 $|OD|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，根据等高线 $\lambda+\mu=\frac{|OC|}{|OD|}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$. 故选 B.

8. A 【解析】解法一：因为 $\tan\angle AOB=-\frac{4}{3}$，$\sin\angle AOB=\frac{4}{5}$，如图 1 所示，过点 C 作 $CD/\!/OB$ 交 OA 的延长线于 D，作 $CE/\!/OA$ 交 OB 的延长线于 E，在 $\triangle OCD$ 中，$\angle OCD=45°$，$\sin\angle ODC=\frac{4}{5}$，由正弦定理得：$\frac{OC}{\sin\angle ODC}=\frac{OD}{\sin\angle OCD}$，得：$\frac{\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{OD}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，得：$OD=\frac{5}{4}=m$，由余弦定理得：$OD^2=OC^2+CD^2-2OC\cdot CD\cos45°$，得：$\frac{25}{16}=2+n^2-2\sqrt{2}n\cos45°$，解得 $n=\frac{1}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$，当 $n=\frac{1}{4}$ 时，$\cos\angle CDO<0$，$\angle CDO$ 为钝角，与 $\angle EOD$ 为钝角矛盾，故 $n=\frac{7}{4}$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{5}{7}$. 故选 A.

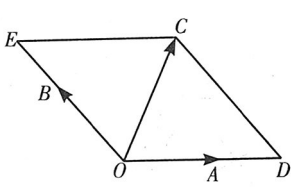


图 1

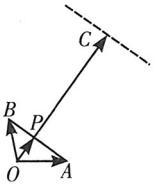


图 2

解法二：此题根据等高线和张角定理，连接 AB，$\tan\angle AOC=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)}=7$，根据张角定理（参考本书解三角形新三板斧）$\frac{\sin\angle AOB}{|OD|}=\frac{\sin\angle AOC}{|OB|}+\frac{\sin\angle COB}{|OA|}$ 可得 $|OD|=\frac{\sqrt{2}}{3}$，故 $m+n=$

 获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{|OC|}{|OD|}=3$，（这部分回答了2017年江苏高考题的秒杀解法）根据正弦定理 $\frac{|OD|}{\sin A}=\frac{|OD|}{\sin B}=\frac{|BD|}{\sin\angle BOC}=\frac{|AD|}{\sin\angle AOC}\Rightarrow\begin{cases}|BD|=\sqrt{2}\\|AD|=\frac{7\sqrt{2}}{5}\end{cases}$，根据对面女孩看过来可知：$\frac{m}{n}=\frac{|BD|}{|AD|}=\frac{5}{7}$，故选A.

达标训练2

1. A **2.** A **3.** A **4.** B **5.** A **6.** A **7.** A **8.** B **9.** A **10.** C **11.** C **12.** B **13.** C **14.** D **15.** A **16.** B

17. $-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ **18.** $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$ **19.** $\frac{5}{2}$ **20.** 2 **21.** $-\frac{8}{3}$ **22.** 2 **23.** 2 **24.** $\frac{1}{2}$ **25.** 2 **26.** $\frac{3}{11}$ **27.** $\frac{29}{18}$ **28.** $\frac{29}{18}$ **29.** 2 **30.** 3

专题4　用万能的建系法求向量乘积问题

达标训练

1. C **2.** B **3.** A **4.** B **5.** D **6.** D **7.** A **8.** A **9.** A **10.** B **11.** B **12.** C **13.** $[-1,\sqrt{2}]$ **14.** $-\frac{16}{15}$ **15.** $\frac{29}{18}$ **16.** 9 **17.** $\frac{29}{18}$ **18.** $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{6}$ **19.** 22 **20.** $2\sqrt{5}$ **21.** 2 **22.** $\frac{1}{2}$ **23.** 2 **24.** $\frac{1}{2}$ **25.** $\frac{7}{12}$ **26.** $\sqrt{2}$ **27.** 1 **28.** 18 **29.** 5 **30.** $\frac{15}{2}$ **31.** $-\frac{1}{4}$ **32.** $\sqrt{3}$ **33.** $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **34.** -2 **35.** 22

专题5　奔驰定理与三角形四心

达标训练

1. B **2.** B **3.** A **4.** A **5.** D **6.** D **7.** B **8.** C **9.** D **10.** A **11.** C **12.** C **13.** A **14.** A **15.** C **16.** B **17.** B **18.** A **19.** C **20.** D **21.** B **22.** A **23.** D **24.** D **25.** C **26.** D **27.** C **28.** A **29.** B **30.** D **31.** 6 **32.** $\frac{3}{2}$ **33.** 90° **34.** -16 **35.** $\sqrt{3}$ **36.** $\frac{1}{2}$

专题6　极化恒等式

达标训练

1. C 【解析】解法一：如图1，以 BC 为 x 轴，BC 的垂直平分线为 y 轴建立坐标系，则 $D(3,5)$，$C(6,0)$，设 $M(x,0)(-6\leqslant x\leqslant 6)$，$\vec{MD}=(3-x,5)$，$\vec{MC}=(6-x,0)$，所以 $\vec{MD}\cdot\vec{MC}=(3-x)(6-x)=(x-\frac{9}{2})^2-\frac{9}{4}$，当 $x=\frac{9}{2}$ 时，则 $\vec{MD}\cdot\vec{MC}$ 的最小值为 $-\frac{9}{4}$. 故选C.

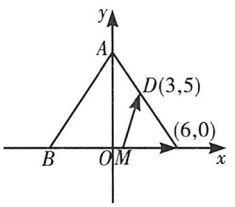


图1

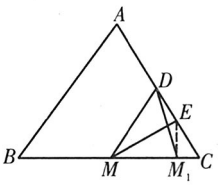


图2

解法二：极化恒等式，如图2所示，取 CD 中点 E，过 E 作 $EM_0\perp BC$，则 $EM_0=\frac{1}{4}h=\frac{1}{4}\sqrt{10^2-6^2}=2$，$\vec{MD}\cdot\vec{MC}=ME^2-CE^2=ME^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\geqslant M_0E^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}h\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}$，故选C.

2. D 【解析】取 MN 中点 P，$\vec{CM}\cdot\vec{CN}=|\vec{CP}|^2-|\vec{MP}|^2=|\vec{CP}|^2-\frac{1}{2}$，故当 P 位于 AB 中点时，$|\vec{CP}|$ 取得最小值 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，当 M 位于 $A(B)$ 点时，$|CP|$ 取得最大值，根据余弦定理，$|\vec{CA}|^2+|\vec{AP}|^2-|\vec{CP}|^2=2|\vec{CA}|\cdot|\vec{AP}|\cdot\cos 45^\circ$，$|\vec{CP}|^2=\frac{13}{2}$，故选D.

3. B 【解析】取 AB 中点 E，AC 中点 F，连接 EF，$\vec{PA}\cdot(\vec{PB}+\vec{PB})=\vec{PA}\cdot\vec{PB}+\vec{PA}\cdot\vec{PC}=|\vec{PE}|^2-$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

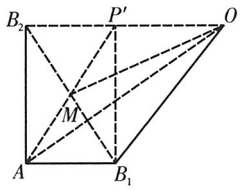
$\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|^2+|\overrightarrow{PF}|^2-\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|^2\geqslant 2|\overrightarrow{PE}|\cdot|\overrightarrow{PF}|-2$，当$|\overrightarrow{PE}|=|\overrightarrow{PF}|$时等号成立，当$P$位于$EF$中点时，$2|\overrightarrow{PE}|\cdot|\overrightarrow{PF}|=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$取得最小，故选B.

4. A 【解析】取AB中点F，连接EF，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{EF}|^2-|\overrightarrow{AF}|^2=|\overrightarrow{EF}|^2-\frac{1}{4}$，根据几何条件，当$EF\perp CD$时，$|\overrightarrow{EF}|$最小，过$B$作$BG\perp CD$交$CD$于$G$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$，$|BG|=|BC|\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$，此时$|EF|=\frac{|AD|+|BG|}{2}=\frac{5}{4}$. 所以$|\overrightarrow{EF}|^2-\frac{1}{4}=\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{21}{16}$，故$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的最小值为$\frac{21}{16}$，故选A.

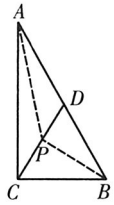
5. B 【解析】解法一：AB，CD是半径为1的圆O的两条直径，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EO}$，可得$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{EO}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AO}$，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{EO}^2-\overrightarrow{OC}^2=\frac{1}{16}-1=-\frac{15}{16}$，故选B.

解法二：极化恒等式，$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=EO^2-OD^2=\left(\frac{1}{4}R\right)^2-R^2=-\frac{15}{16}R^2=-\frac{15}{16}$，故选B.

6. D 【解析】如图在三角形OPA中，M为AP中点，及$2(OM^2+MP^2)=OP^2+OA^2$，又因为$OM\perp B_1B_2$，$MB_2=PM$，$OM^2+MB_2{}^2=OB_2{}^2=1$，即$OP^2+OA^2=2$，即$\frac{7}{4}\leqslant OP^2\leqslant 2$，即$\frac{\sqrt{7}}{2}\leqslant OP\leqslant\sqrt{2}$，故选D.

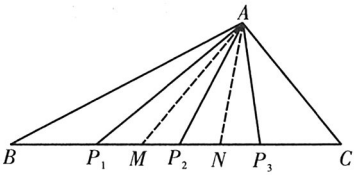


7. D 【解析】$PA^2+PB^2=2(PD^2+DA^2)$，又因为$PD=PC=\frac{1}{4}AB$，$AD=2PC=\frac{1}{2}AB$，故选D.



8. D

9. C 【解析】解法一：$I_1=\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_1})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP_2})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{13}{8}\overrightarrow{AC}^2+|\overrightarrow{AC}|^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}|\overrightarrow{AC}|^2$，同理可得：$I_2=\frac{5}{16}|\overrightarrow{AC}|^2$，$I_3=\frac{3}{8}|\overrightarrow{AC}|^2$ 所以$I_1>I_3>I_2$，故选C.



解法二：极化恒等式，取P_1P_2中点M，P_2P_3中点N，$I_1=\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}=AM^2-\left(\frac{P_1P_2}{2}\right)^2$，$I_2=\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_3}=AP_2{}^2-(P_1P_2)^2$，$I_3=\overrightarrow{AP_2}\cdot\overrightarrow{AP_3}=AN^2-\left(\frac{P_1P_2}{2}\right)^2$，目测法显然$I_1>I_3$，又$AP_2^2=\frac{AM^2+AN^2}{2}-\left(\frac{P_1P_2}{2}\right)^2$，显然$I_3>I_2$，此题可以详细算出$AP_2$，$AM$，$AN$，$P_1P_2$，基本性质判断可以快速得出答案 所以$I_1>I_3>I_2$，故选C.

10. D **11.** C

12. B 【解析】解法一：因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}$，所以$ab\cos C=-\frac{1}{2}$，由余弦定理可得，$ab\times\frac{a^2+b^2-4}{2ab}=-\frac{1}{2}$，所以$a^2+b^2=3$，由余弦定理可得，$\cos A=\frac{b^2+4-a^2}{4b}=\frac{b^2+4-(3-b^2)}{4b}=\frac{2b^2+1}{4b}=\frac{b}{2}+\frac{1}{4b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{4b}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅

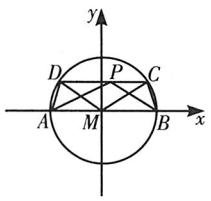
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

当$\frac{b}{2}=\frac{1}{4b}$即$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，此时$\cos A$取得最小值，根据余弦函数$y=\cos x$在$(0,)$上单调递减可知，此时A取得最大$\frac{\pi}{4}$，则$\angle A$的最大值是$\frac{\pi}{4}$，故选B.

解法二：$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}=CD^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2\Leftrightarrow|CD|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，其中$D$为$AB$中点，根据正弦定理，在$\Delta ACD$中，$\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle ACD\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时A取得最大$\frac{\pi}{4}$，故选B.

13. C 【解析】解法一：根据题意，建立平面直角坐标系，如图所示：



不妨设$CD//AB$，由$AB=4$，$\angle CMD=120°$，得$M(0,0)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(\sqrt{3},1)$，$D(-\sqrt{3},1)$，由P在线段CD上(端点C，D除外)，可设$P(x,1)$，其中$x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$；则$\overrightarrow{PA}=(-2-x,-1)$，$\overrightarrow{PB}=(2-x,-1)$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-2-x)(2-x)+1=x^2-3$；又$x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，所以$x^2-3\in[-3,0)$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是$[-3,0)$，故选C.

解法二：极化恒等式$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PM^2-AM^2\in\left[r^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2,r^2-r^2\right)=[-3,0)$，故选C.

14. B 【解析】解法一：因为$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{26}$，$|\boldsymbol{c}|=2$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\frac{\sqrt{26}}{2}$，所以$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\leqslant\frac{13}{2}$，因为$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant\frac{3}{4}$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant\frac{7}{2}$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为$\frac{\sqrt{14}}{2}$，故选B.

解法二：极化恒等式$\frac{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}{2}=\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2+\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2=\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)_{\max}^2+\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)_{\min}^2=\frac{5}{2}$，故只需求得$\left|\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)\right|_{\max}$，根据法一的第一步可知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant\frac{\sqrt{26}}{2}$，故$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为$\frac{\sqrt{14}}{2}$，故选B.

15. D 【解析】解法一：由题意，可知：因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=2$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=-1$，所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=1$. 因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{e}|=1$，所以$\cos<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}>=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{e}|}=\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$.

所以$<\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}>=\frac{\pi}{3}$. 所以可以把$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{e}$两个向量作为基底向量来表示$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$. 可设$\begin{cases}\boldsymbol{a}=\lambda_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu_2\boldsymbol{e}\\\boldsymbol{b}=\lambda_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu_2\boldsymbol{e}\end{cases}$. 因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=2$，所以$2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=[\lambda_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu_1\boldsymbol{e}]\cdot\boldsymbol{e}=\lambda_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}+\mu_1\cdot|\boldsymbol{e}|^2=\lambda_1+\mu_1$. 同理，因为$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=-1$，所以$-1=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=[\lambda_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu_2\boldsymbol{e}]\cdot\boldsymbol{e}=\lambda_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}+\mu_2\cdot|\boldsymbol{e}|^2=\lambda_2+\mu_2$. 联立两式，得：$\begin{cases}\lambda_1+\mu_1=2\\\lambda_2+\mu_2=-1\end{cases}$，即$\begin{cases}\mu_1=2-\lambda_1\\\mu_2=-1-\lambda_2\end{cases}$. 又因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda_1+\lambda_2)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{e}$，所以可得方程组：$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1\\\mu_1+\mu_2=0\end{cases}$，即：$\begin{cases}\lambda_2=1-\lambda_1\\\mu_2=-\mu_1\end{cases}$.

由上面两个方程组，可知：$\begin{cases}\lambda_2=1-\lambda_1\\\mu_1=2-\lambda_1\\\mu_2=\lambda_1-2\end{cases}$. 所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=[\lambda_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu_1\boldsymbol{e}]\cdot[\lambda_2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu_2\boldsymbol{e}]=[\lambda_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(2-\lambda_1)\boldsymbol{e}]\cdot[(1-\lambda_1)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\lambda_1-2)\boldsymbol{e}]=\lambda_1(1-\lambda_1)\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+[\lambda_1(\lambda_1-2)+(2-\lambda_1)(1-\lambda_1)]\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}+(2-\lambda_1)(\lambda_1-2)\cdot|\boldsymbol{e}|^2=4\lambda_1(1-\lambda_1)+[\lambda_1(\lambda_1-2)+(2-\lambda_1)(1-\lambda_1)]+(2-\lambda_1)(\lambda_1-2)=-3\lambda_1^2+3\lambda_1-2$. 由二次函数的知识，可知：当$\lambda_1=\frac{1}{2}$时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$取得最大值为$-\frac{5}{4}$. 故选D.

解法二：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2$，故根据题

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

意，只需求$|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$最小值，根据$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{e}=3\leqslant|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}\right)^2\geqslant 1-\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}$. 故选 D.

16. B 【解析】解法一：在$\triangle ABC$中，由余弦定理得：$\cos\angle ABC=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2BC\cdot AB}=\frac{4}{7}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-\angle ABC)=7\times 8\times\left(-\frac{4}{7}\right)=-32$，故选 B.

解法二：根据极化恒等式$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-BD^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2=-BD^2+\frac{49}{4}$，其中$D$为$AC$中点，由于$\frac{BA^2+BC^2}{2}=BD^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2\Rightarrow BD^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{177}{4}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-BD^2+\frac{49}{4}=-32$，故选 B.

17. 【解析】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{BM}|^2=9-25=-16$.

18. 【解析】$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=-1$；解得$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{45}{8}$，$|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{13}{8}$，故$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right|^2-|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{7}{8}$.

19. 【解析】设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{e}$，则$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，由绝对值不等式得$\sqrt{6}\geqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|=|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|$，于是对任意的单位向量$\boldsymbol{e}$，均有$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}|\leqslant\sqrt{6}$，由题设当且仅当$\boldsymbol{e}$与$\overrightarrow{OD}$同向时，等号成立，此时$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^2$取得最大值 6，由于$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|)^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\overline{\boldsymbol{b}}|^2)=10$，于是$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$取得最小值 4，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2}{4}\leqslant\frac{1}{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值是$\frac{1}{2}$.

20. 4　$2\sqrt{5}$　**21.** $\frac{1}{2}$　**22.** $2\sqrt{2}$　**23.** 25

24. 【解析】解法一：由$AB=2$，$AC=4$，$\angle BAC=60°$可得$BC=2\sqrt{3}$，$AB\perp BC$，以B为原点建立坐标系如图 1，作$PE\perp BC$于E，设P点横坐标为x，则$x\in[0,2\sqrt{3}]$，$EC=2\sqrt{3}-x$，所以$PE=\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}-x)$，所以$P\left(x,\frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}-x)\right)$，所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\left(-x,\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3})\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-x,\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3})\right)=x(x-2\sqrt{3})+\frac{1}{3}(x-2\sqrt{3})^2=\frac{4}{3}x^2-\frac{10\sqrt{3}}{3}x+4$，由二次函数可知，当$x=\frac{5\sqrt{3}}{4}$时得最小值$-\frac{9}{4}$，当$x=0$时得最大值 4，所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的范围为$\left[-\frac{9}{4},4\right]$，故答案为$\left[-\frac{9}{4},4\right]$.

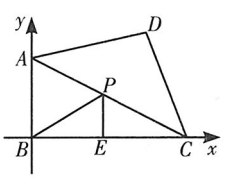


图 1

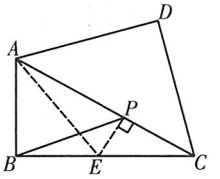


图 2

解法二：极化恒等式，如图 2 所示，取BC中点E，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=PE^2-BC^2=PE^2-3$，显然当$PE\perp AC$时，$PE$取得最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，当$P$位于$A$点时，$PE$取得最大值$\sqrt{7}$，所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$的范围为$\left[-\frac{9}{4},4\right]$. 故答案为$\left[-\frac{9}{4},4\right]$.

25. 【解析】(1)$x_1^2+x_2^2=3$ $y_1^2+y_2^2=2$(参考仿射大法部分，这里不详解)；(2)$4|OM|^2+|PQ|^2\geqslant 4|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|$，所以$|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|\leqslant\frac{1}{4}[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_2+y_1)^2]=\frac{5}{2}$，故最大值为$\frac{5}{2}$，故答案为$\frac{5}{2}$.

专题 7　极化恒等式之矩形大法

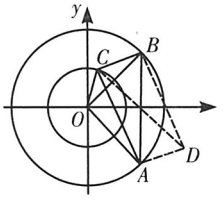
达标训练

1. C 【解析】如图所示，设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，点$C$在圆$x^2+y^2=1$上，点$A$，$B$在圆$x^2+y^2=4$上，则$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CB}$，因此$CA\perp$

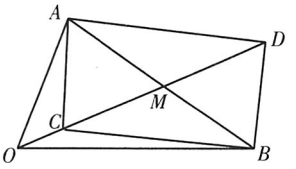
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

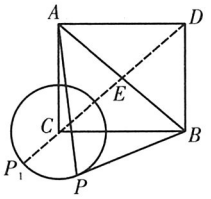
CB，作矩形 $ACBD$，故根据矩形大法 $|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2+|\overrightarrow{OD}|^2$，根据 $|\overrightarrow{CD}|-|\overrightarrow{OC}|\leqslant|\overrightarrow{OD}|\leqslant|\overrightarrow{OC}|+|\overrightarrow{CD}|$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，即 $|\overrightarrow{AB}|-1\leqslant\sqrt{7}\leqslant1+|\overrightarrow{AB}|$，故有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\in[\sqrt{7}-1,\sqrt{7}+1]$. 故选 C.



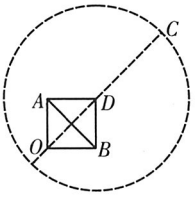
2. D 【解析】如图，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，由 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，因此 $CA\perp CB$，作矩形 $ACBD$，M 为 AB 中点，根据三角形知识 $|OC|+|CM|\geqslant|OM|$，$|OD|-|DM|\leqslant|OM|$，当 O，C，D 三点共线时，$|OC|=m$，$|OD|=n$，故根据矩形大法 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$，且 $|OA|^2+|OB|^2=|OC|^2+|OD|^2=\frac{41}{4}$，故 $(m+n)^2=m^2+n^2+2mn=\frac{45}{4}\Rightarrow m+n=\frac{3\sqrt{5}}{2}$；故选 D.



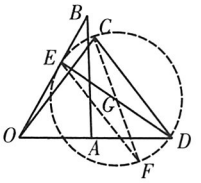
3. B 【解析】如图，作矩形 $ACBD$，因为 $\angle C=90°$，$|AB|=6$，所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|=|AB|=|CD|=6$，连接 CD 并反向延长至 P_1，根据矩形大法 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$，易知当 $\overrightarrow{PC}$ 与 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ 方向相同时，即 P 位于 P_1 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最大值 $2\times8=16$，故选 B.



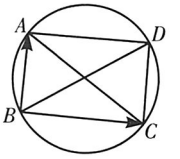
4. B 【解析】如图，由 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 是单位向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，作正方形 $OADB$，易知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OD}|=\sqrt{2}$，由向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，故 C 在以 D 为圆心，2 为半径的圆上，所以 $2-\sqrt{2}\leqslant|\boldsymbol{c}|\leqslant2+\sqrt{2}$. 故选 B.



5. A 【解析】如图，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OD}=2\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，显然 $|OD|=4$，$|OE|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\Rightarrow\angle AOB=60°$ 则：$\angle OED=90°$，$|ED|=2\sqrt{3}$，$(\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a})\cdot\left(\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}\right)=0\Rightarrow CE\perp CD$；所以 $\boldsymbol{c}$ 的终点在以 ED 中点 G 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆上，当 B，C，G，F 共线时，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 的最小值 $|BC|$ 为 $|BG|-|CG|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$. 故选 A.



6. C 【解析】因为 $|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，所以 A，B，C，D 四点共圆，圆的直径为 $|AC|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，则 $|\overrightarrow{BD}|$ 的最大值为直径长度为 $\sqrt{5}$，故选 C.

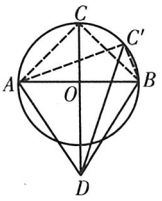


7. C 【解析】由 $\boldsymbol{c}^2-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 得：

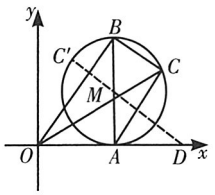
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

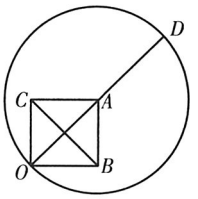
$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，即$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\perp(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$），设$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{c}$，则$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则点$C$在以$AB$为直径的圆$O$周上运动，由图知：当$DC\perp AB$时，$|DC|\geqslant|DC'|$，设$\angle ADC=\theta$，则$|DC|=|DO|+|AO|=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，所以当$\theta=\frac{\pi}{4}$时，$|DC|$取最大值$\sqrt{2}$，故选C.



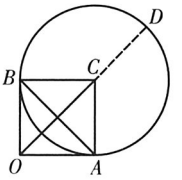
8. A 【解析】因为$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，所以$\cos\theta=\frac{1}{2}$即夹角$\theta=\frac{1}{3}\pi$，故可设$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$，因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，所以$(1-x,-y)\cdot(1-x,\sqrt{3}-y)=0$所以$(x-1)^2+y^2-\sqrt{3}y=0$，即$(x-1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$表示以$M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆心，以$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径的圆，则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|CD|$最大值的几何意义是在圆$M$上任取一点，到$D(2,0)$的距离的最大值，根据圆的性质可知，所求的值为圆心$M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$到$D$的距离$|C'D|=|MD|+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$，故选A.



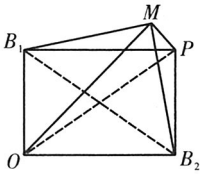
9. 【解析】设$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{c}$，如图$\boldsymbol{c}$的终点$D$的几何意义是以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的终点$A$为圆心，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$为半径的圆，则$|\boldsymbol{c}|$的最大值为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，因为$a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以$2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，则$a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2)}=\sqrt{2(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)}=\sqrt{4(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)}=\sqrt{4\times(1+1)}=2\sqrt{2}$，当且仅当$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，即$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$时取等号，即$|\boldsymbol{c}|$的最大值为$2\sqrt{2}$. 故答案为$2\sqrt{2}$.



10. 【解析】如图，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以四边形$OACB$是边长为1的正方形，以$C$为圆心，以1为半径作圆$C$，设$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{\boldsymbol{m}}$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\overrightarrow{\boldsymbol{m}}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{CD}|\leqslant 1$，所以$D$在圆$C$内部或圆周上，且$|\overrightarrow{\boldsymbol{m}}|=|-\overrightarrow{\boldsymbol{m}}|=|OD|$. 所以$\sqrt{2}-1\leqslant|OD|\leqslant\sqrt{2}+1$，即$\sqrt{2}-1\leqslant|\overrightarrow{\boldsymbol{m}}|\leqslant\sqrt{2}+1$. 故答案为$[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1]$.



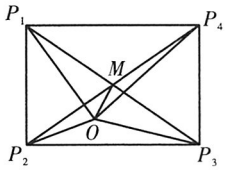
11. 【解析】如图所示，因为$\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$，则根据矩形大法$|OM|^2+|PM|^2=|B_1M|^2+|B_2M|^2=4$，又由于$0\leqslant|\overrightarrow{MP}|<1$所以$|\overrightarrow{OM}|$的范围是$(\sqrt{3},2]$. 故答案为$(\sqrt{3},2]$.



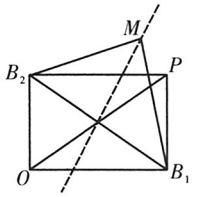
12. 【解析】连接P_1P_3和P_2P_4交于M，根据矩形大法可知$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_2}\overrightarrow{OP_4}=|OM|^2-|P_1M|^2=|OM|^2-\frac{49}{4}$，$|OP_1|^2+|OP_3|^2=|OP_2|^2+|OP_4|^2=41=2(|OM|^2+|P_1M|^2)\Rightarrow|OM|^2=\frac{33}{4}$，所以$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_4}=\frac{33}{4}-\frac{49}{4}=-4$. 故答案为$-4$.

获取更多资料加qq群698274639

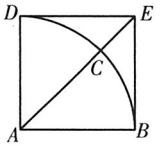
获取更多资料加qq群698274639



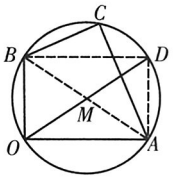
13. 【解析】如图，以 O 为原点，以 OB_2，OB_1 所在直线为坐标轴建立平面直角坐标系，则 $B_1(0, 2)$，$B_2(1, 0)$，$P=(1, 2)$，因为 $|\overrightarrow{MB_1}|=|\overrightarrow{MB_2}|$，所以 M 点的轨迹为为线段 B_1B_2 的中垂线 l，直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1$，即 $x-2y+\frac{3}{2}=0$，所以 P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{\left|1-4+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$. 所以 $|\overrightarrow{PM}|\geqslant\frac{3\sqrt{5}}{10}$. 故答案为 $\left[\frac{3\sqrt{5}}{10}, +\infty\right)$



14. 【解析】如图所示，构造正方形 $ABED$，以 A 为圆心，AB 为半径在正方形内部作作圆，显然 C 在圆弧上，根据矩形大法可知，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}$，故当 A，C，E 三点共线时，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}$ 取得最小值 $-\sqrt{2}\cdot(2-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$，故答案为 $2-2\sqrt{2}$.



15. 【解析】(1) $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{16+4\times4}=4\sqrt{2}$；



(2)如上图构造矩形 $OADB$，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，因为 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，所以 C 在以 AB 为直径的圆上，当 OC 为直径时，$|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5}$.

16. 【解析】(1)由题意可得 $2b=2$，即 $b=1$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2-c^2=1$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，即有椭圆的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)解法一：设 $P(x_0, y_0)$，切线的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，可得 $y=kx+(y_0-kx_0)$，代入椭圆方程 $x^2+2y^2=2$，即有 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$，由直线与椭圆相切，可得 $\triangle=0$，即为 $16k^2(y_0-kx_0)^2-8(1+2k^2)[(y_0-kx_0)^2-1]=0$，化为 $k^2(x_0^2-2)-2kx_0y_0+y_0^2-1=0$，由 $T_1P\perp T_2P$，可得 $k_1k_2=-1$，即有 $\frac{x_0^2-1}{y_0^2-2}=-1$，化为 $x_0^2+y_0^2=3$，可得点 P 的轨迹 E 的方程为圆 $x^2+y^2=3$；

解法二：参考例 6 用矩形大法来证明.

(3)PT_1 交 E 于 Q_1，PT_2 交 E 与 Q_2，可得 Q_1Q_2 为圆的直径，设 $\angle PQ_1Q_2=\alpha$，即有 $PQ_1=2\sqrt{3}\cos\alpha$，$PQ_2=2\sqrt{3}\sin\alpha$，则 $\triangle PQ_1Q_2$ 面积为 $S=\frac{1}{2}PQ_1\cdot PQ_2=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cos\alpha\cdot2\sqrt{3}\sin\alpha=6\sin\alpha\cos\alpha=3\sin2\alpha$，当 $\alpha=45°$ 时，$\sin2\alpha$ 取得最大值 1.

专题 8　对角线向量定理(斯坦纳定理)

达标训练

1. B 【解析】解法一：因为在边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 中，所以 $\triangle ACE$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，且 $AE/\!/BD$，$AE=BD$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\cos60°=\frac{3}{2}$，故选 B.

解法二：对角线向量定理，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{AD^2+BC^2-AB^2-CD^2}{2}=\frac{3}{2}$，故选 B.

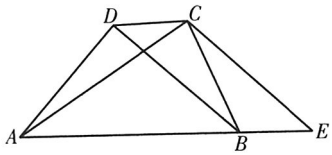
2. B 【解析】解法一：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\cdot$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

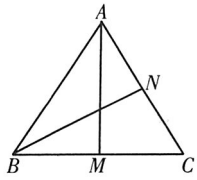
$\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}^2=0$，所以$\overrightarrow{AD}^2-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=10$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=10$，故选 B.

解法二：作辅助线 $CE/\!/BD$ 交 AB 延长线于 E，易知 $AC\perp CE$，且 $|AE|=7$，根据对角线向量定理可得：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{AC^2+BD^2-AB^2-CD^2}{2}=\frac{AE^2-AB^2-CD^2}{2}=10$. 故选 B.



3. A 【解析】解法一：由图可知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，故选 A.

解法二：$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{AN^2+BM^2-AB^2-MN^2}{2}=\frac{4+4-16-4}{2}=-6$，故选 A.



4. D 【解析】解法一：设 AB 中点为 D，则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}$，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，所以 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP})\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+0=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2)=\frac{1}{2}(9-4)=\frac{5}{2}$，故选 D.

解法二：$\boldsymbol{c}\cdot(a-b)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{PB}^2)-(\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{PA}^2)}{2}=\frac{\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2}{2}=\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}$，故选 D.

5. D 【解析】解法一：取 AB，AC 的中点 E，F，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AE}=2|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AF}|\cos\angle OAF-2|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AE}|\cos\angle OAE=2|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AF}|\frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AO}|}-2|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AE}|\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AO}|}=2|\overrightarrow{AF}|^2-2|\overrightarrow{AE}|^2=2\times2^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$，故选 D.

解法二：$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{AC^2+OB^2-AB^2-OC^2}{2}=\frac{7}{2}$，故选 D.

6. C 【解析】解法一：可设菱形的边长为 1，则 $BE=CF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BD=1$；线段 AD，BD 的中点分别为 E，F；所以$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BC})$；所以$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})\cdot(\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{CF}|}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle}{\frac{3}{4}}$，由图看出 $-\frac{1}{2}<\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle<1$，所以 $-\frac{1}{2}<\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}\rangle<\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}\rangle<\frac{2\pi}{3}$，即异面直线 BE 与 CF 所成角的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$. 故选 C.

解法二：设 $AB=2$，在翻折过程中 $1<CE<\sqrt{7}$，$\cos\langle\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{|(FB^2+CE^2)-(CB^2+EF^2)|}{2|\overrightarrow{CF}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=$

获取更多资料加qq群698274639

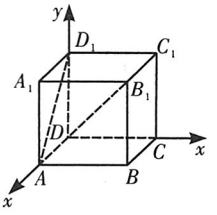
获取更多资料加qq群698274639

$\frac{|\overrightarrow{CE}^2-4|}{6}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，所以异面直线 BE 与 CF 所成角的取值范围是$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，故选 C.

7. C 【解析】解法一：以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，因为在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，所以 $A(1,0,0)$，$D_1(0,0,\sqrt{3})$，$D(0,0,0)$，$B_1(1,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,\sqrt{3})$，设异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}|}{|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{DB_1}|}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

解法二：$\cos\langle AD_1,DB_1\rangle=\frac{AB_1^2+DD_1^2-AD^2-B_1D_1^2}{2|AD_1||DB_1|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

8. C 【解析】解法一：梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=5$，$BC=3$，设梯形的高为 h，则梯形 $ABCD$ 的面积为$\frac{1}{2}(5+3)h=8$，解得 $h=2$；建立平面直角坐标系如图所示，设 $B(x,2)$，则 $C(x+3,2)$，又 $A(0,0)$，$D(5,0)$，所以$\overrightarrow{AC}=(x+3,2)$，$\overrightarrow{BD}=(5-x,-2)$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(x+3)(5-x)-4=-x^2+2x+11$，当 $x=1$ 时，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$取得最大值为 $-1+2+11=12$. 故选 C.



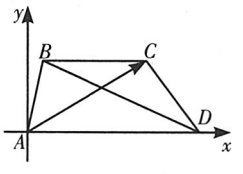


图 1

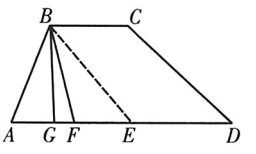


图 2

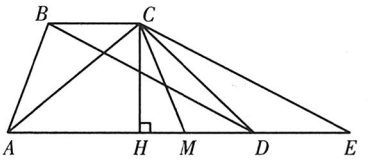


图 3

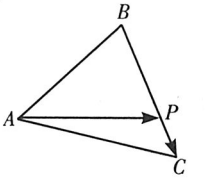
解法二：对角线向量定理，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{AD^2+BC^2-AB^2-CD^2}{2}=\frac{34-(AB^2+CD^2)}{2}$，如图 2，过 B 作 $BE\parallel CD$ 交 AD 于 E，F 为 AE 中点，$BG\perp AD$ 于 G，则$\frac{AB^2+CD^2}{2}=\frac{AB^2+BE^2}{2}=BF^2+AF^2\geqslant BG^2+AF^2=5$，$(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD})_{\max}=12$.

解法三：极化恒等式平移构造，如图 3，过 C 作 $CE\parallel BD$ 交 AD 延长线于 E，M 为 AE 中点，$CH\perp AD$ 于 H，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CE}=-(CM^2-AM^2)\leqslant 16-CH^2=12$，故选 C.

9. C 【解析】解法一：由条件，知$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$. 所以 $|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=6^2+4^2+8^2+2\times6\times8\cos120°=68$，所以 $CD=2\sqrt{17}$，故选 C.

解法二：$AD^2=AB^2+BD^2=80$，$BC^2=AB^2+AC^2=52$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{|(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2)|}{2}$，解得 $|CD|=2\sqrt{17}$. 故选 C.

10. 【解析】解法一：如图，因为 $AB=2$，$AC=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，且 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{2}{3}|\overrightarrow{AC}|^2=-\frac{1}{3}\times2-\frac{1}{3}\times4+\frac{2}{3}\times9=4$. 故答案为 4.



获取更多资料加qq群698274639

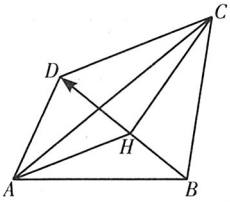
获取更多资料加qq群698274639

解法二：由余弦定理向量式得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{BC}^2}{2}=2$得$BC=3$. 又$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{PC}$，所以$PB=2$，$PC=1$. 由对角线向量定理得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{(\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{PB}^2)-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{PC}^2)}{2}=\frac{(9+4)-(4+1)}{2}=4$.

11. 【解析】解法一：因为已知正方形$ABCD$的边长为2，E为CD的中点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，故$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=4+0-0-\frac{1}{2}\times4=2$. 故答案为2.

解法二：由对角线定理得，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{EB}^2-(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{ED}^2)}{2}=2$.

12. 【解析】解法一：取BD的中点H，连接AH，CH，由ΔBCD为等边三角形可得$CH\perp BD$，由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=1$，可得$(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2)=1$，可得$\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+2=4+2=6$，即有$AD$的长为$\sqrt{6}$. 故答案为$\sqrt{6}$.

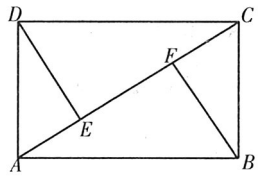


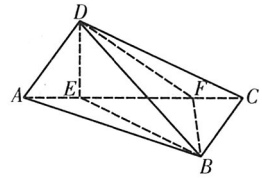
解法二：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{AD^2+BC^2-AB^2-CD^2}{2}=1\Rightarrow AD^2=2+CD^2+AB^2-BC^2=6$. 故答案为$\sqrt{6}$.

13. 【解析】解法一：$AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，所以$AC=\sqrt{6^2+8^2}=10$，所以$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$；又$\Delta ACD$是等边三角形，所以$AD=AC=10$，$\cos\angle CAD=\frac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=10\times10\times\frac{1}{2}-10\times6\times\frac{3}{5}=14$.

解法二：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{AD^2+BC^2-AB^2-CD^2}{2}=\frac{AD^2+64-36-CD^2}{2}=14$，故答案为14.

14. 【解析】解法一：矩形$ABCD$中，$AB=4$，$BC=3$，过点D作$DE\perp AC$于点E，过点B作$BF\perp AC$于点F，如图所示，则$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BF}|=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，$|\overrightarrow{EF}|=5-2\times\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$；沿对角线$AC$把矩形折成二面角$D-AC-B$的平面角为60°时，则$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BF}^2+\overrightarrow{FE}^2+\overrightarrow{ED}^2+2\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FE}+2\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{ED}+2\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\frac{12}{5}\right)^2\times2+\left(\frac{7}{5}\right)^2+0+0+2\times\frac{12}{5}\times\frac{12}{5}\times\cos(180°-60°)=\frac{193}{25}$，所以$|BD|=\frac{\sqrt{193}}{5}$. 故答案为$\frac{\sqrt{193}}{5}$.





解法二：由于$\cos\langle DE,BF\rangle=\frac{DF^2+BE^2-BD^2-EF^2}{2|DE||BF|}=\frac{1}{2}$①，因为$|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BF}|=\frac{3\times4}{5}=\frac{12}{5}$，$|\overrightarrow{EF}|=5-2\times\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$，$|\overrightarrow{DF}|=|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{193}}{5}$，代入①，所以$|BD|=\frac{\sqrt{193}}{5}$. 故答案为$\frac{\sqrt{193}}{5}$.

第3章　天山七剑下四海　解三角形破解路

专题1　三板斧之射影定理

达标训练

1. C 【解析】解法一：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，即$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$2R\sin C$，代入 $a\cos B+b\cos A$ 中得：$2R\sin A\cos B+2R\sin B\cos A=2R(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=2R\sin(A+B)=2R\sin C=c$. 故选 C.

解法二：射影定理直接可得 $a\cos B+b\cos A=c$. 故选 C.

2. 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，根据射影定理 $3b\sin A=c\cos A+a\cos C=b$，所以 $\sin A=\frac{1}{3}$. 所以 $\cos 2A=1-2\sin^2 A=\frac{7}{9}$，故答案为 $\frac{1}{3}$，$\frac{7}{9}$.

3. 【解析】由射影定理得：$a\cos B+b\cos A=3a=c$，$c=3a$，所以 $\frac{c}{a}=3$. 故答案为 3.

4. 【解析】因为 $b\cos C+(a+c)(b\sin C-1)=0$，且 $a+c=2$，所以 $(b\cos C-a)+2b\sin C-c=-c\cos B+2b\sin C-c=0$，由正弦定理可得 $-\sin C\cos B+2\sin B\sin C-\sin C=0$，即有 $2\sin B-\cos B=1$，可得：$\cos B=2\sin B-1$，可得：$\sin^2 B+\cos^2 B=\sin^2 B+(2\sin B-1)^2=1$，解得：$\sin B=\frac{4}{5}$. 故答案为 $\frac{4}{5}$.

5. 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b\Rightarrow a\cos C+c\cos A=\frac{b}{2\sin B}=b$，所以 $\sin B=\frac{1}{2}$，又 $a>b$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. 故答案为 $\frac{\pi}{6}$.

6. 【解析】因为 $(2a-b)\cdot\cos C=c\cdot\cos B$，所以 $2a\cos C=b\cos C+c\cos B=a$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$. 故答案为 6.

7. 【解析】因为 $(a+2c)\cos B+b\cos A=0$，所以 $-2c\cos B=a\cos B+b\cos A=c$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{2\pi}{3}$.

8. 【解析】根据题意，$\triangle ABC$ 中，$b=a\left(\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\right)=a\cos C+c\cos A$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}a\sin C=c\cos A$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$，变形可得 $\tan A=\sqrt{3}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，即 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又由 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，则 $\sin C=\frac{c\times\sin A}{a}=\frac{1}{2}$，又由 $a>c$，则 $A>C$，则 $C=\frac{\pi}{6}$. 故答案为 $\frac{\pi}{6}$.

9. 【解析】(1)由已知，$(2b-c)(b^2+c^2-a^2)=2abc\cos C$，则 $(2b-c)\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cos C$，所以 $(2b-c)\cos A=a\cos C$，由正弦定理，$2\sin B\cos A-\sin C\cos A=\sin A\cos C$，所以 $2\sin B\cos A=\sin(A+C)=\sin B$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=60°$；(2)解法一：由题意，$A=\frac{\pi}{3}$ 及 $a=\sqrt{3}$，求得三角形外接圆半径 $R=1$，建立以外接圆圆心为原点的坐标系，$BC\parallel x$ 轴，M 点坐标为 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，则 A 点坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，则 $|AM|=\sqrt{\cos^2\theta+\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}+\sin\theta}$，$\sin\theta\leqslant1$ $\left(\text{当}\ \theta=\frac{\pi}{2}\text{时取“}=\text{”}\right)$，所以 $|AM|$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

解法二：因为 AM 为 BC 边上中线，令 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AM}=\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}$①，$\frac{\overrightarrow{CB}}{2}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2}$② 两式平方和得 $AM^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{b^2+c^2}{2}$；又因为 $a=\sqrt{3}$，所以 $b^2+c^2-3=bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{2}$，所以 $b^2+c^2\leqslant6$，所以 $AM\leqslant\frac{3}{2}$，即 AM 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

10. 【解析】(1) $\triangle ABC$ 中，由 $\frac{4\sin A-\sqrt{7}\cos C}{c}=\frac{\sqrt{7}\cos B}{b}$，根据正弦定理得，$(4\sin A-\sqrt{7}\cos C)\cdot\sin B=\sqrt{7}\cos B\sin C$ $4\sin A\sin B=\sqrt{7}\cos B\sin C+\sqrt{7}\sin B\cos C$，即 $4\sin B\sin A=\sqrt{7}\sin A$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$；(2)由已知和正弦定理以及(1)得 $\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$，①设 $\cos A-\cos C=x$，②，①^2+②^2，得 $2-2\cos(A+C)=\frac{7}{4}+x^2$③，又 $a<$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$b<c$，$A<B<C$，所以 $0°<B<90°$，$\cos A>\cos C$，故 $\cos(A+C)=-\cos B=-\frac{3}{4}$，代入③式得 $x^2=\frac{7}{4}$，因此 $\cos A-\cos C=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

11. 【解析】(1)因为 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$，利用正弦定理得：$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$，因为 $\sin B=\sin(A+C)$，$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin(A+C)-\sin C=0$，$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin A\cos C-\cos A\sin C-\sin C=0$，所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C+\cos A\sin C$，$\sqrt{3}\sin A=1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$，而 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，所以 $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；(2)依题意，$b+c=2\sqrt{3}$，$bc=2$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-bc=12-6=6$，所以 $a=\sqrt{6}$.

12. 【解析】(1)由正弦定理得 $2\sin A\cos C=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，即 $2\sin A\cos C=\sin(B+C)=\sin A$，由于 $\sin A\neq 0$，故 $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$；(2)由于 $c=2$，三角形的周长为 6，故 $a+b=4$，由余弦定理有 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab$，即 $4=16-3ab$，故 $ab=4$，所以三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

13. 【解析】(1)由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，所以 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，化简并整理得 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即 $\sin(A-30°)=\frac{1}{2}$，所以 $A-30°=30°$，从而 $A=60°$；(2)解法一：由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $25=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，又 $3bc\leqslant 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$，所以 $(b+c)^2-3bc\geqslant\frac{1}{4}(b+c)^2$，即 $25\geqslant\frac{1}{4}(b+c)^2$，所以 $b+c\leqslant 10$，从而 $a+b+c\leqslant 15$，所以 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 15.

解法二：$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，$b+c=2R(\sin B+\sin C)=\frac{10\sqrt{3}}{3}[\sin B+\sin(A+B)]=\frac{10\sqrt{3}}{3}[\sin B+\sin(60°+B)]=10\sin(B+30°)$，当 $B=60°$ 时，$b+c$ 取得最大值 10，所以 $\triangle ABC$ 的周长的最大值为 15.

专题2　三板斧之灵动面积周长公式

达标训练

1. C　【解析】由 $\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$ 得 $\frac{2bc(1-\cos A)}{bc}=1$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

2. D　【解析】由 $4\sqrt{3}S=(a+b)^2-c^2$，得 $4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2]\tan\frac{C}{2}=(a+b)^2-c^2\Rightarrow\tan\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow C=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，故选 D.

3. D　【解析】由三角形的面积 $S=\frac{a^2+b^2-c^2}{12}$，得 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{12}$，$S=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)\tan C=\frac{a^2+b^2-c^2}{12}$ 所以 $\tan C=\frac{1}{3}$，得 $\sin C=\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，因为 $A=\frac{2\pi}{3}$，$a=2\sqrt{10}$，所以由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $c=\frac{a}{\sin A}\cdot\sin C=\frac{2\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 D.

4. A　【解析】$\triangle ABC$ 中，$b=2$，$B=60°$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{4}[(a+c)^2-b^2]\tan\frac{B}{2}=\sqrt{3}$，所以 $(a+c)^2=16$，解得 $a+c=4$. 故选 A.

5. C　【解析】因为 $c=2\cos C(a\cos B+b\cos A)=2c\cos C$，解得：$\cos C=\frac{1}{2}$，因为 $C=\frac{\pi}{3}$. 因为 $c=\sqrt{7}$，所以由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2]\tan\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}[(a+b)^2-7]$，解得：$a+b=5$，所以$\triangle ABC$的周长$=a+b+c=5+\sqrt{7}$．故选 C.

6. D 【解析】因为$2S+a^2=(b+c)^2$，所以$2S=\frac{1}{2}[(b+c)^2-a^2]\tan\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2$，所以$\tan\frac{A}{2}=2$，所以$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}=-\frac{4}{3}$，则$\sin A=\frac{4}{5}$，故选 D.

7. 【解析】$(a+b-c)(a+b+c)=3ab$，则$a^2+b^2-c^2=ab$，整理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，由于$0<C<\pi$，解得$C=\frac{\pi}{3}$．由于$c=4$，故$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，转换为$16\geqslant 2ab-ab=ab$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant 4\sqrt{3}$．故最大值为$4\sqrt{3}$.

8. 【解析】$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{2}$，因为$S=\frac{1}{4}[a^2-(b-c)^2]\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=5\sqrt{2}$，所以$a^2=44$，故$a=2\sqrt{11}$．故答案为$2\sqrt{11}$.

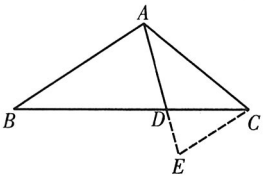
专题3　三板斧之万能辅助角公式

达标训练

1. B 【解析】解法一：在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，若$\cos A=\frac{3}{5}$，$a=4$，所以$\sin A=\frac{4}{5}$．则$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3}{5}$，故$b^2+c^2=16+\frac{6}{5}bc\geqslant 2bc$，即$bc\leqslant 20$，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\cdot 20\cdot\frac{4}{5}=8$，故选 B.

解法二：若$\cos A=\frac{3}{5}$，$a=4$，所以$\cos\frac{A}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$2R=5$，$b+c=5(\sin B+\sin C)=10\cos\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}[(b+c)^2-a^2]\tan\frac{A}{2}\leqslant\frac{1}{4}(80-16)\times\frac{1}{2}=8$，故选 B.

2. C 【解析】解法一：因为$BD=2DC$，$\angle DAC=30°$，$AD=2$，$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{3}$，所以$\triangle ADC$的面积为$\sqrt{3}$，可得$\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle DAC=\frac{1}{2}\times 2\times AC\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$，所以解得$AC=2\sqrt{3}$，因为$\triangle ACD$中，$CD^2=12+4-2\times 2\sqrt{3}\times 2\times\cos 30°=4$，所以解得$CD=2$，因为$\angle DAC=30°$，$AD=2$，$BD=2DC$，所以$\angle C=30°$，$BD=4$，所以在$\triangle ABC$中，$AB^2=(2\sqrt{3})^2+6^2-2\times 2\sqrt{3}\times 6\times\cos 30°=12$，解得$AB=2\sqrt{3}$．故选 C.



解法二：倍长定比分线，如图，作$CE\parallel AB$交AD延长线于E，易知$CE=\frac{1}{2}AB$，$AE=3$，$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{3}$，所以$\triangle ADC$的面积为$\sqrt{3}$，可得：$\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\angle DAC=\frac{1}{2}\times 2\times AC\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$，所以解得：$AC=2\sqrt{3}$，易知$CE=\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{3}$．故选 C.

3. D 【解析】解法一：因为由正弦定理可得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，所以$b+c=2\sin B+2\sin C=2\sin B+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=2\sin B+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=3\sin B+\sqrt{3}\cos B=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，因为$B$，$C$为锐角，$B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以$B\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，可得$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以$b+c=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in(3,2\sqrt{3}]$，故选 D.

解法二：根据万能辅助角公式：$b+c=2R\cdot 2\cos\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，因为$B$，$C$为锐角，$B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以$B\in$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，可得：$B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $b+c=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in(3,2\sqrt{3}]$，故选 D.

4. C 【解析】解法一：因为 $2a\sin C=\sqrt{3}c$，所以由正弦定理得 $2\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin C$，因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq 0$. 所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为三角形 ABC 是锐角三角形，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. 由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $1=(b+c)^2-3bc$，所以 $bc=\frac{(b+c)^2-1}{3}$. 因为 $b>0$，$c>0$，所以 $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$，所以 $(b+c)^2\geqslant 4bc$. 所以 $bc=\frac{(b+c)^2-1}{3}\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}$. 所以 $b+c\leqslant 2$，当且仅当 $b=c=1$ 时等号成立. 所以 $\triangle ABC$ 周长 $a+b+c$ 的最大值为 $1+2=3$. 故选 C.

解法二：$a=1$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，根据万能辅助角公式：$b+c=2R\cdot 2\cos\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$，所以 $\triangle ABC$ 周长 $a+b+c$ 的最大值为 $1+2=3$. 故选 C.

5. B 【解析】因为 $\triangle ABC$ 中，$S=\frac{1}{2}ab\sin C$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，且 $a^2+b^2-c^2=4\sqrt{3}S$，所以 $2ab\cos C=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times ab\sin C$，解得：$\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$，因为 $c=1$，所以 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$，可得 $a=2\sin A$，$b=2\sin B=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)$，$\sqrt{3}b-a=2\sqrt{3}\sin B-2\sin A=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)-2\sin A=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)-2\sin A=\sqrt{3}\cos A+\sin A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 2$，可得 $\sqrt{3}b-a$ 的最大值为 2. 故选 B.

6. D 【解析】解法一：$\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$C=\frac{\pi}{6}$，则 $2R=\frac{AB}{\sin C}=4$，则 $AC+\sqrt{3}BC=4\sin B+4\sqrt{3}\sin A=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)+4\sqrt{3}\sin A=2\cos A+6\sqrt{3}\sin A=4\sqrt{7}\sin(A+\theta)$，由于：$0<A<\frac{5\pi}{6}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<A+\theta<\frac{4\pi}{3}$，所以最大值为 $4\sqrt{7}$. 故选 D.

解法二：根据万能辅助角公式：$AC+\sqrt{3}BC=b+\sqrt{3}a=2R\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cos C+1}\sin(A+\varphi)\leqslant 4\sqrt{7}$. 故选 D.

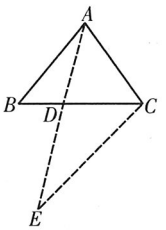
7. 【解析】由 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $B=\frac{\pi}{4}$，根据正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=2$，可得 $a=2\sin A$，$c=2\sin C$，可得 $\sqrt{2}a+c=2\sqrt{2}\sin A+2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}\sin A+\sqrt{2}\cos A=2\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos A\right)$，令 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$，可知 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\sqrt{2}a+c=5\sqrt{2}\sin(A+\varphi)$，又因为 $A\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A+\varphi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，由于 φ 是一个确定值，可得 $\sqrt{2}a+c=5\sqrt{2}\sin(A+\varphi)\in(4,2\sqrt{5}]$. 故答案为 $(4,2\sqrt{5})$.

8. 【解析】因为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ac\cos B$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$；又 $b=\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的内角和 $A+B+C=\pi$，又 $A>0$，$C>0$，得 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，由正弦定理，知 $a=\frac{b\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sin A$，$c=\frac{b\cdot\sin C}{\sin B}=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$，所以 $(\sqrt{3}-1)a+2c=2(\sqrt{3}-1)\sin A+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=2\sqrt{3}\sin A+2\sqrt{3}\cos A=2\sqrt{6}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}$

获取更多资料加qq群698274639

$<\frac{11\pi}{12}$，又 $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)<\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，所以 $3-\sqrt{3}<2\sqrt{6}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2\sqrt{6}$. 故答案为 $(3-\sqrt{3},2\sqrt{6})$.

9. 【解析】倍长定比分线，如图，作 $CE\parallel AB$ 交 AD 延长线于 E，易知 $CE=2AB=2c$，$AE=6$，$\angle ACE=120°$，根据余弦定理：$AE^2=b^2+4c^2-2b\cdot 2c\cdot\cos120°\Rightarrow b^2+4c^2+2bc=36$，$S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}S_{\triangle ADC}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}$，故只需求 $S_{\triangle AEC}$ 最大值，$36=b^2+4c^2+2bc\geqslant 4bc+2bc=6bc\Rightarrow bc\leqslant 6$，$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}\times 2bc\times\sin120°\leqslant 3\sqrt{3}$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故答案为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



10. 【解析】因为 $a=2$，$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，所以由正弦定理可得：$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，因为 $\sin B>0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，可得 $\tan A=\sqrt{3}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，所以由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得 $4=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，所以由 $4=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，可得：$(b+c)^2=4+3bc\leqslant 4+3\times 4=16$，即 $b+c\leqslant 4$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，所以 $\triangle ABC$ 周长 $a+b+c\leqslant 2+4=6$，即其最大值为 6. 故答案为 6.

11. 【解析】(1)因为 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$. 则 $\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C=\sin^2A-\sin B\sin C$，所以由正弦定理得：$b^2+c^2-a^2=bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；(2)因为 $\sqrt{2}a+b=2c$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)=2\sin C$，解得 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，$C=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$，所以 $\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

12. 【解析】(1)因为 $a=2$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，因为 $a>b\geqslant c$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$，所以由正弦定理可得 $\sin B=\frac{b\cdot\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3}{4}$，因为 $a>b\geqslant c$，可得 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{21}-3}{8}$，所以 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，所以 $c=\frac{\sqrt{21}-3}{8}\times\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{8}$；(2)因为 $a=2$，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $b-c=\frac{4\sqrt{3}}{3}(\sin B-\sin C)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B-\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)=2\sqrt{3}\sin B-2\cos B=4\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $\frac{\pi}{6}\leqslant B<\frac{\pi}{3}$，所以 $B-\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，所以 $b-c\in[0,2)$.

13. 【解析】(1)因为 $a=\sqrt{2}b\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)=b\sin C+b\cos C$，所以由正弦定理可得：$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$，所以 $\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\sin B$，可得：$\cos B\sin C=\sin C\sin B$，因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=\sin B$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；(2)因为 $B=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sqrt{2}\sin A-\sin C=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-C\right)-\sin C=\cos C$，又因为 $0<C<$

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{3\pi}{4}$，且 $y=\cos C$ 在 $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调递减，所以 $\sqrt{2}\sin A-\sin C$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

14. 【解析】(1) 由于 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，根据万能辅助角公式：$\sin(B+C)+\sqrt{2}\sin B=\sqrt{2+2\sqrt{2}\cos C+1}\sin(B+\varphi)=2\sin C$，所以 $\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos C}\geqslant 2\sin C$，即 $4\cos^2 C+2\sqrt{2}\cos C-1\geqslant 0\Rightarrow\cos C\geqslant\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$；(2) $\sin A+\lambda\sin B=2\sin C$ $(\lambda>0)\Rightarrow\sqrt{\lambda^2+2\lambda\cos C+1}\geqslant 2\sin C$ 恒成立，故此不等式变形为 $4\cos^2 C+2\lambda\cos C+\lambda^2-3\geqslant 0\Rightarrow\left(2\cos C+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(\lambda^2-4)\geqslant 0$ 恒成立，故只需 $\lambda\geqslant 2$，由于 $\lambda=2$ 时，$\cos C=-\frac{1}{2}$，等号成立，此时 $\sin A+2\sin B=2\sin C\Rightarrow\sqrt{3}\sin(B+\varphi)=2\sin C=\sqrt{3}$ $\left(\tan\varphi=\frac{\sin C}{\cos C+2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，此时 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$，此时 $B+C=\pi$ 显然矛盾，故 $\lambda\neq 2$，所以 $\lambda>2$. 注意：临界条件是否取等，需要验算.

专题4　三板斧之米勒定理

达标训练

1. C 【解析】因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C\Rightarrow ab=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\cos C}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\tan C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}\Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C$，故选 C.

2. C 【解析】因为 $c^2=(a-b)^2+6$，所以 $6=2ab(1-\cos C)=2ab\left(1-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow ab=6$，则 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，故选 C.（采用灵动双曲线焦点三角形面积公式 $S=\frac{1}{4}[c^2-(a-b)^2]\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 可以一步秒杀）

3. A 【解析】因为 $\triangle ABC$ 的边 a，b，c 满足 $(a+b)^2-c^2=4=2ab(1+\cos C)$，$C=60°$，所以 $ab=\frac{4}{3}$，故选 A.

4. D 【解析】$\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$C=\frac{\pi}{6}$，则 $2R=\frac{AB}{\sin C}=4$，则 $AC+\sqrt{3}BC=4\sin B+4\sqrt{3}\sin A=4\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)+4\sqrt{3}\sin A=2\cos A+6\sqrt{3}\sin A=4\sqrt{7}\sin(A+\theta)$，由于 $0<A<\frac{5\pi}{6}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 所以 $0<A+\theta<\frac{4\pi}{3}$，所以最大值为 $4\sqrt{7}$. 故选 D. 秒杀解法：利用万能辅助角公式：$AC+\sqrt{3}BC=b+\sqrt{3}a\leqslant 2R\sqrt{3+2\sqrt{3}\cos C+1}=4\sqrt{7}$.

5. 【解析】因为 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A\Rightarrow 2b\cos B=b$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，因为 $0<B<\pi$　所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{\pi}{3}$.

6. 【解析】将 $b\cos C+c\cos B=a=2b\Rightarrow\frac{a}{b}=2$. 故答案为 2.

7. 【解析】由已知条件 $(a+b-c)(a+b+c)=ab$ 可得 $a^2+b^2-c^2+2ab=ab$ 即 $a^2+b^2-c^2=-ab$. 由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，又因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{2\pi}{3}$.

8. 【解析】$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2)\tan B$，可得 $\tan B=\sqrt{3}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，$\angle C$ 为钝角，$A\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\frac{1}{\tan A}\in(\sqrt{3},+\infty)$. $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A}=\cos B+\frac{1}{\tan A}\sin B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\tan A}\in(2,+\infty)$. 故答案为 $(2,+\infty)$

9. 【解析】因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{4}\Rightarrow\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，采用灵动双曲线焦点三角形面积公式 $S=\frac{1}{4}[a^2-(b-c)^2]\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=3\sqrt{15}\Rightarrow a^2-4=60$，解得 $a=8$. 故答案为 8.

10. 【解析】由正弦定理得 $a+\sqrt{2}b=2c$，得 $c=\frac{1}{2}(a+$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\sqrt{2}b$)，由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b)^2}{2ab}=\dfrac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{\sqrt{2}}{2}ab}{2ab}=\dfrac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2}{2ab}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\geqslant\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b}{2ab}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，当且仅当$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$时，取等号，故$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\leqslant\cos C<1$，故 $\cos C$ 的最小值是$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 故答案为$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

秒杀解法：根据万能辅助角公式 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C\Rightarrow\sin(B+C)+\sqrt{2}\sin B=2\sin C\leqslant\sqrt{2+2\sqrt{2}\cos C+1}$，平方得：$4\sin^2C\leqslant3+2\sqrt{2}\cos C\Rightarrow4\cos^2C+2\sqrt{2}\cos C-1\geqslant0\Rightarrow\cos C\geqslant\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$或$\cos C\leqslant\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$(舍).

11. 【解析】由 $a+b>2c$，即 $c<\dfrac{a+b}{2}$，由余弦定理和基本不等式知：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\dfrac{a^2+b^2-\frac{(a+b)^2}{2}}{2ab}$，$=\dfrac{3(a^2+b^2)-2ab}{8ab}\geqslant\dfrac{6ab-2ab}{8ab}=\dfrac{1}{2}$，故 $0<C<\dfrac{\pi}{3}$. 故答案为$\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

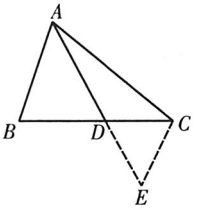
秒杀解法：$a+b>2c\Rightarrow\sin A+\sin B=\sqrt{2+2\cos C}$，$\sin(A+\varphi)>2\sin C\Rightarrow2\cos^2C+\cos C-1>0$，即$(2\cos C-1)(\cos C+1)>0\Rightarrow\cos C>\dfrac{1}{2}$或 $\cos C<-1$，故 $\cos C>\dfrac{1}{2}\Rightarrow C\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

12. 【解析】因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，所以由正弦定理可得：$\dfrac{b}{\sin B}=2$，可得：$a=2\sin A$，$c=2\sin C=2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)$，所以 $3a+c=6\sin A+2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=6\sin A+\sqrt{3}\cos A+\sin A=2\sqrt{13}\sin(A+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$，所以 $3a+c$ 的最大值为 $2\sqrt{13}$. 故答案为 $2\sqrt{13}$.

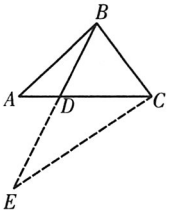
秒杀解法：利用万能辅助角公式(公式四)：$c+3a\leqslant2R\sqrt{9+6\cos B+1}=2\sqrt{13}$.

13. 【解析】利用万能辅助角公式：$2\sqrt{2}|AB|+3|AC|=2\sqrt{2}\left(c+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}b\right)\leqslant4\sqrt{2}R\cdot\sqrt{\dfrac{9}{8}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos A+1}$，由于 $\cos A=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$2R=\sqrt{2}$，代入得 $2\sqrt{2}|AB|+3|AC|=2\sqrt{2}\left(c+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}b\right)\leqslant4\sqrt{\dfrac{5}{8}}=\sqrt{10}$.

14. 【解析】如图，直接讲重点，$|AE|=3\sqrt{7}$，$|CE|=\dfrac{1}{2}|AB|$，$|AC|=6$，$\angle ACE=120°$. 根据余弦定理可求 $|AC|^2+|CE|^2-2|AC|\cdot|CE|\cos120°=|AE|^2$，解得 $|CE|=3\Rightarrow|AB|=6$. 故答案为 6.



15. 【解析】如图，易求得 $\cos\angle ABC=\dfrac{1}{4}$，$|BE|=4\sqrt{2}$，$|CE|=3|AB|$，$\cos\angle BCE=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\sin\angle BCE=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$3AB+BC=2R\cdot2\cos\dfrac{\angle BCE}{2}\sin\left(\angle E+\dfrac{\angle BCE}{2}\right)\leqslant\dfrac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$. 故答案为$\dfrac{16\sqrt{5}}{5}$.



16. 【解析】(1) 证明：在 $\triangle ABC$ 中，因为$\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}\Rightarrow b\cos A+a\cos B=\dfrac{ab\sin C}{c}=\dfrac{ab}{2R}$，所以由正弦定理得 $\cos A\sin B+\cos B\sin A=\sin A\sin B$，因为 $\sin(A+B)=\sin C$. 所以整理可得：$\sin A\sin B=\sin C$；(2) 解 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{6}{5}bc$，由

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

余弦定理可得 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin A=\frac{4}{5}$，$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{3}{4}$，$\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\sin C}{\sin C}=1$，$\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{1}{4}$，$\tan B=4$.

17. 【解析】(1)因为在$\triangle ABC$中，$0<C<\pi$，所以$\sin C\neq 0$，$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，整理得：$2\cos C\sin(A+B)=\sin C$，即$2\cos C\sin[\pi-(A+B)]=\sin C$，$2\cos C\sin C=\sin C$，所以$\cos C=\frac{1}{2}$，所以$C=\frac{\pi}{3}$；(2)由余弦定理得$7=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}$，所以$(a+b)^2-3ab=7$，因为$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$ab=6$，所以$(a+b)^2-18=7$，所以$a+b=5$，所以$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{7}$.

18. 【解析】(1)由正弦定理得：$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$，即$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，所以$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，即$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，所以$\sin(A-30°)=\frac{1}{2}$，所以$A=60°$；(2)若$a=2$，$\triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}$，$bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$，所以$bc=4$①，再利用余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=(b+c)^2-3bc=(b+c)^2-3\times 4=4$，所以$b+c=4$②，结合①②求得$b=c=2$.

19. 【解析】(1)$3a\cos A=c\cos B+b\cos C\Rightarrow 3\sin A\cos A=\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin A$；得$\cos A=\frac{1}{3}$；因为$\cos A=\frac{1}{3}$，所以$\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos B=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=-\frac{1}{3}\cos C+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin C$，已知$\cos B+\cos C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\cos C+\sqrt{2}\sin C=\sqrt{3}$，与$\cos^2 C+\sin^2 C=1$，联立解得$\sin C=\frac{\sqrt{6}}{3}$，已知$a=1$，再根据正弦定理：$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 【解析】(1)根据题意，$b\cos A+a\cos B=2c\cos B+2b\cos C$，由正弦定理设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，则整理求得$\sin(A+B)=2\sin(B+C)$，又$A+B+C=\pi$，所以$\sin C=2\sin A$，即$\frac{\sin C}{\sin A}=2$；(2)由余弦定理可知$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B\Rightarrow=(a+c)^2-b^2=2ac(1+\cos B)$；由(1)可知$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a}=2$. 再由$b=2$，联立求得$c=2$，$a=1$，$\sin B=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

21. 【解析】(1)$\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$，所以$\sin B=4(1-\cos B)$，因为$\sin^2 B+\cos^2 B=1$，所以$16(1-\cos B)^2+\cos^2 B=1$，所以$16(1-\cos B)^2+\cos^2 B-1=0$，所以$(17\cos B-15)(\cos B-1)=0$，所以$\cos B=\frac{15}{17}$；

(2)由(1)可知$\sin B=\frac{8}{17}$，因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B=2$，所以$ac=\frac{17}{2}$，所以$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{17}=a^2+c^2-15=(a+c)^2-2ac-15=36-17-15=4$，所以$b=2$.

22. 【解析】(1)因为在$\triangle ABC$中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$. 所以$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$B=\frac{\pi}{4}$；

(2)由(1)得$C=\frac{3\pi}{4}-A$，所以$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)=\sqrt{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$. 因为$A\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，所以$A+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，故当$A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$时，$\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$取最大值1，即$\sqrt{2}\cos A+\cos C$的最大值为1.

23. 【解析】(1)由已知得：$-\cos(A+B)+\cos A\cos B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$，即$\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin A\cos B=0$，因为$\sin A\neq 0$，所以$\sin B-\sqrt{3}\cos B=0$，即$\tan B=\sqrt{3}$，又$B$为三角形的内角，则$B=\frac{\pi}{3}$；(2)因为$a+c=1$，$\cos B=\frac{1}{2}$，所以由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B\Rightarrow(a+c)^2-b^2=2ac(1+\cos B)=3ac$，即$b^2=1-$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$3ac<1$，且 $(a+c)^2-3ac\geqslant(a+c)^2-3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{1}{4}\leqslant b^2<1$，则 $\frac{1}{2}\leqslant b<1$.

解法二：$a+c=1=2R(\sin A+\sin C)=2R(\sin A+\sin(A+B))=2\sqrt{3}R\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in(\sqrt{3}R,2\sqrt{3}R]$，故 $b=2R\sin B\in\left[\frac{1}{2},1\right)$.

24. 【解析】(1)由已知和正弦定理得 $\sin A=\sin B\cos C+\sin B\sin C$，因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以 $\sin B=\cos B$，即 $\tan B=1$，因为 B 为三角形的内角，所以 $B=\frac{\pi}{4}$；

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$，由已知及余弦定理得：$4=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{4}\geqslant 2ac-2ac\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理得：$ac\leqslant\frac{4}{2-\sqrt{2}}$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.

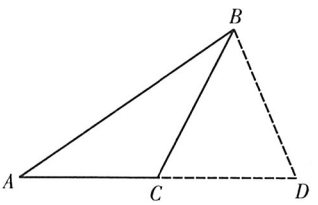
25. 【解析】(1)因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a=2$. 又 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=13$. 所以 $c=\sqrt{13}$；(2)由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=2\sin A$，$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=2\sin C$，所以 $2a-c=4\sin A-2\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)-2\sin C=4\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos C-\cos\frac{2\pi}{3}\sin C\right)-2\sin C=2\sqrt{3}\cos C$. 因为 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $0<C<\frac{2\pi}{3}$，所以 $-\frac{1}{2}<\cos C<1$，所以 $-\sqrt{3}<2\sqrt{3}\cos C<2\sqrt{3}$，所以 $2a-c$ 的取值范围为 $(-\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

26. 【解析】(1)因为 $a^2+b^2=ab+c^2$，即 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle C=60°$；(2)因为 $c=1$，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B$，$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A$，所以 $\frac{1}{2}b+a=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A+2\sin A\right)=\frac{\sqrt{21}}{3}\sin(A+\varphi)$，其中 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{5}$，所以当 $\sin(A+\varphi)=1$ 时，$\frac{1}{2}b+a$ 取最大值 $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

27. 【解析】(1)因为 $(a+b)\sin A=2b\sin(A+C)=2b\sin(A+C)=2b\sin B$，所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $a(a+b)=2b^2$，整理可得 $(a+2b)(a-b)=0$，因为 $a+2b>0$，所以 $a=b$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，得证；(2)设 $BD=x$，则 $AD=2x$，由余弦定理可得：$\cos\angle CDA=\frac{4x^2+17-25}{2\times 2x\times\sqrt{7}}$，$\cos\angle CDB=\frac{x^2+17-25}{2\times x\times\sqrt{17}}$，因为 $\angle CDA=\angle CDB$，所以 $\frac{4x^2+17-25}{2\times 2x\times\sqrt{17}}=-\frac{x^2+17-25}{2\cdot x\cdot\sqrt{17}}$，解得 $x=2$，所以 $AB=6$.

28. 【解析】(1)由 $(2b-c)\cos A=a\cos C$，得 $2\sin B\cdot\cos A=\sin A\cdot\cos C+\sin C\cos A$，则 $2\sin B\cdot\cos A=\sin(A+C)=\sin B$，因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，又因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；

(2)解法一：由于点 D 满足 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$，且 $BD=3$，所以 C 为线段 AD 的中点，则在 $\triangle ABD$ 中，$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos A$，整理得：$9=(AB+BD^2)-3AB\cdot BD$，由于 $AB\cdot BD\leqslant\left(\frac{AB+BD}{2}\right)^2$，则：$9\geqslant\frac{3}{4}(c+2b)^2+(c+2b)^2$，所以 $c+2b\leqslant 6$，由于 $c+2b>3$，所以 $3<c+2b\leqslant 6$，即 $2b+c$ 的取值范围为 $(3,6]$



获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

(2)解法二：如图，在$\triangle ABD$中，$2R=\frac{|BD|}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$，根据万能辅助角(中间过程请读者自己完成，老唐只给思路)$2b+c=|AD|+|AB|=2R\cdot\cos 30^\circ\sin(\angle D+30^\circ)=6\sin(\angle D+30^\circ)\in(3,6]$，当$\angle D=60^\circ$时等号成立.

29. 【解析】(1)$\frac{H}{AD}=\tan\beta\Rightarrow AD=\frac{H}{\tan\beta}$，同理$AB=\frac{H}{\tan\alpha}$，$BD=\frac{h}{\tan\beta}$，$AD-AB=DB$，故得$\frac{H}{\tan\beta}-\frac{H}{\tan\alpha}=\frac{h}{\tan\beta}$，得$H=\frac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{4\times 1.24}{1.24-1.20}=124$；(2)由题设知$d=AB$，得$\tan\alpha=\frac{H}{d}$，$\tan\beta=\frac{H}{AD}=\frac{h}{DB}=\frac{H-h}{d}$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{H}{d}-\frac{H-h}{d}}{1+\frac{H}{d}\cdot\frac{H-h}{d}}=\frac{hd}{d^2+H(H-h)}=\frac{h}{d+\frac{H(H-h)}{d}}$

$d+\frac{H(H-h)}{d}\geqslant 2\sqrt{H(H-h)}$(当且仅当$d=\sqrt{H(H-h)}=\sqrt{125\times 121}=55\sqrt{5}$时，取等号)，故当$d=55\sqrt{5}$时，$\tan(\alpha-\beta)$最大. 因为$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，所以当$d=55\sqrt{5}$时，$\alpha-\beta$最大.

秒杀解法：先证一下米勒定理，模仿前面例题解析框里面的证明过程，再根据米勒定理可得，当仅当过点B，D的圆与射线AE切于E点时，$\alpha-\beta$最大，此时$|AE|=\sqrt{|AB||AD|}\Rightarrow d=55\sqrt{5}$.

30. 【解析】如图2所示，建立平面直角坐标系，则$A(200,0)$，$B(0,220)$，$C(0,300)$. 直线l的方程为$y=(x-200)\tan\alpha$，即$y=\frac{x-200}{2}$. 设点P的坐标为(x,y)，则$P\left(x,\frac{x-200}{2}\right)(x>200)$由经过两点的直线的斜率公式$k_{PC}=\frac{\frac{x-200}{2}-300}{x}=\frac{x-800}{2x}$，$k_{PB}=\frac{\frac{x-200}{2}-220}{x}=\frac{x-640}{2x}$. 由直线$PC$到直线$PB$的角的公式得

$$\tan\angle BPC=\frac{k_{PB}-k_{PC}}{1+k_{PB}k_{PC}}=\frac{\frac{160}{2x}}{1+\frac{x-800}{2x}\cdot\frac{x-640}{2x}}=\frac{64x}{x^2-288x+160\times 640}=\frac{64}{x+\frac{160\times 640}{x}-288}$$

$(x>200)$. 要使$\tan\angle BPC$达到最大，只须$x+\frac{160\times 640}{x}-288$达到最小. 由均值不等式$x+\frac{160\times 640}{x}-288\geqslant 2\sqrt{160\times 640}-288$. 当且仅当$x=\frac{160\times 640}{x}$时上式取等号. 故当$x=320$时$\tan\angle BPC$最大. 这时，点$P$的纵坐标为$y=\frac{320-200}{2}=60$. 由此实际问题知，$0<\angle BPC<\frac{\pi}{2}$，所以$\tan\angle BPC$最大时，$\angle BPC$最大. 故当此人距水平地面60米高时，观看铁塔的视角$\angle BPC$最大.

秒杀解法：当且仅当过点B，C的圆与直线l切于第一象限P点时，$\angle BPC$最大，此时设直线l与y轴的负半轴交点为D，根据米勒定理可得$DP=\sqrt{|DB||DC|}=160\sqrt{5}\Rightarrow|DA|=160\sqrt{5}$，$|PA|=60\sqrt{5}$，点$P$纵坐标为60.

31. 【解析】(1)作$CD\perp AO$于D，则$CD=x=\sqrt{3}$，在直角ΔCDO中，$DO=\frac{\sqrt{3}}{3}x=1$，$\tan\angle BCD=\frac{BO-OD}{CD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\tan\angle ACD=\frac{AO-OD}{CD}=\sqrt{3}$，因$\angle BCD$，$\angle ACD$都为锐角，所以$\angle BCD=30^\circ$，$\angle ACD=60^\circ$，所以$\tan\theta=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$；(2)设$\angle BCD=\alpha$，$\angle ACD=\beta$. 做如下规定：当$D$点在$B$点下方时$\alpha$为正，当$D$点在$B$点上方时$\alpha$为负，当$D$点与$B$重合时$\alpha$为零. 类似地$\beta$也如此规定. 于是有$\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$\theta=\beta-\alpha$，$\tan\alpha=\frac{BO-OD}{CD}=\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}$，$\tan\beta=\frac{AO-OD}{CD}=\frac{4-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}$

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{4-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}-\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}}{1+\frac{4-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}\cdot\frac{2-\frac{\sqrt{3}}{3}x}{x}}=$$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{2}{\frac{4}{3}x+\frac{8}{x}-2\sqrt{3}} \leqslant \frac{2}{2\sqrt{\frac{4}{3}x\cdot\frac{8}{x}}-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3}$，当且仅当$\frac{4}{3}x=\frac{8}{x}$，$x=\sqrt{6}$时，$\tan\theta$最大，从而$\theta$最大，此时$C$点离墙$\sqrt{6}$m.

秒杀解法：先证一下米勒定理，再根据米勒定理可得，当仅当过点A，B，的圆与射线DC切于C点时，$\beta-\alpha$最大，此时$OC^2=|OB|\cdot|OA|$，$\left(\frac{CO}{\cos 30°}\right)^2=|BO|\cdot|AO|=8$，即$|CD|=\sqrt{6}$.

32. 【解析】(1) 如图，作$CD\perp AF$于D，则$CD=EF$，设$\angle ACD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$，$CD=x$，则$\theta=\alpha-\beta$，在Rt$\triangle ACD$和Rt$\triangle BCD$中，$\tan\alpha=\frac{2.5}{x}$，$\tan\beta=\frac{0.5}{x}$，则$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2x}{x^2+1.25}$，令$u=\frac{2x}{x^2+1.25}$，则$ux^2-2x+1.25u=0$，因为上述方程有大于0的实数根，所以$\Delta\geqslant 0$　即$4-4\times 1.25u^2\geqslant 0$，所以$u\leqslant\sqrt{\frac{1}{1.25}}$，即$(\tan\theta)_{\max}=\sqrt{\frac{1}{1.25}}$，因为正切函数$y=\tan x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数，所以视角$\theta$同时取得最大值，此时，$x=\frac{2}{2u}=\sqrt{1.25}$，所以观察者离墙$\sqrt{1.25}$米远时，视角$\theta$最大；

(2) 由(1)可知，$\tan\theta=\frac{1}{2}=\frac{\frac{4-a}{x}-\frac{2-a}{x}}{1+\frac{4-a}{x}\cdot\frac{2-a}{x}}=\frac{2x}{x^2+8-6a+a^2}$，即$x^2-4x+4=-a^2+6a-4$，所以$(x-2)^2=-(a-3)^2+5$，因为$1\leqslant a=2$，所以$1\leqslant(x-2)^2\leqslant 4$，化简得：$0\leqslant x\leqslant 1$或$3\leqslant x\leqslant 4$，又因为$x>1$，所以$3\leqslant x\leqslant 4$.

33. 【解析】(1) 设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，半焦距为$c$，则$|MA_1|=\frac{a^2}{c}-a$，$|A_1F_1|=a-c$. 由题意，得

$$\begin{cases}\frac{a^2}{c}-a=2(a-c)\\ 2a=4\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$$，所以$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$.

故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；(2) 设$P(m,y_0)$，$|m|>1$，当$y_0=0$时，$\angle F_1PF_2=0$；当$y_0\neq 0$时，$0<\angle F_1PF_2<PF_1M<\frac{\pi}{2}$，所以只需求$\tan\angle F_2PF_2$的最大值即可. 设直线$PF_1$的斜率$k_1=\frac{y_0}{m+1}$，直线$PF_2$的斜率$k_2=\frac{y_0}{m-1}$，所以$\tan\angle F_1PF_2=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\frac{2|y_0|}{m^2-1+y_0^2}\leqslant\frac{2|y_0|}{2\sqrt{m^2-1}\cdot|y_0|}=\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}$当且仅当$\sqrt{m^2-1}=|y_0|$时，$\angle F_1PF_2$最大，所以$Q(m,\pm\sqrt{m^2-1})|m|>1$.

秒杀解法：利用米勒定理，可得：当$\angle F_1PF_2$最大时，一定有$y_P{}^2=(-1-m)(1-m)=m^2-1\Rightarrow y_P=\pm\sqrt{m^2-1}$，故所以$Q(m,\pm\sqrt{m^2-1})|m|>1$.

专题5　新三板斧之角平分线相关定理

达标训练

1. D 【解析】解法一：由角平分线定理得：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$，余弦定理可得：$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{19}$，所以$BD=\frac{2}{5}BC=\frac{2\sqrt{19}}{5}$，在三角形$ABC$中，由余弦定理得$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+19-9}{4\sqrt{19}}=\frac{7}{2\sqrt{19}}$，在三角形$ABD$中由余弦定理得$\cos B=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}$，$\frac{7}{2\sqrt{19}}=\frac{4+\frac{4\times 19}{25}-AD^2}{2\times 2\times\frac{2\sqrt{19}}{5}}$，解得$AD=\frac{6}{5}$. 故选D.

解法二：由角平分线张角定理得：$\cos\frac{\angle BAC}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow AD=\frac{6}{5}$. 故选D.

2. C 【解析】解法一：在$\triangle ABD$中，$\angle A=30°$，$\angle ADB=60°$，在ΔBCD中，$CD=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\angle C=$

获取更多资料加qq群698274639

45°，$\angle CBD=15°$，可得$\frac{CD}{\sin 15°}=\frac{BD}{\sin 45°}$，即为$\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{BD}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得$BD=1$，可得$AB=BD\tan 60°=\sqrt{3}$，故选 C.

解法二：由张角定理得：$\frac{\sin\angle ABC}{BD}=\frac{\sin\angle ABD}{BC}+\frac{\sin\angle CBD}{AB}\Rightarrow\frac{\sin 105°}{BD}=\frac{\sin 15°}{CD\sin 120°}+\frac{\sin 15°}{\sqrt{3}BD}$，解得$BD=1$，$AB=\sqrt{3}$，故选 C.

3. D 【解析】根据题意，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，因为$\angle ABC$的平分线交$AC$于点$D$，且$BD=\sqrt{3}$，所以$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times BD\times c\times\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{3}}{4}c$，$S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\times BD\times a\times\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，而$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{4}c+\frac{\sqrt{3}}{4}a$，化简得$ac=c+a$，即$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，则$a+2c=(a+2c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=3+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{2c}{a}}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当$a=\sqrt{2}c$时取等号，即最小值为$3+2\sqrt{2}$. 故选 D. 注意：可以直接张角定理加柯西不等式，此为熟能生巧.

4. D 【解析】由$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 2\alpha=S$，得$AD\cdot(AB+AC)=AB\cdot AC\cdot 2\cos\alpha$，所以$AD=\frac{AB\cdot AC\cdot 2\cos\alpha}{AB+AC}\leqslant\frac{AB\cdot AC\cdot 2\cos\alpha}{2\sqrt{AB\cdot AC}}=\sqrt{AB\cdot AC}\cos\alpha=\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}\cos\alpha=\sqrt{\frac{2S\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{S\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{S}{\tan\alpha}}$，当且仅当$AB=AC=\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}$时取等. 故选 D.

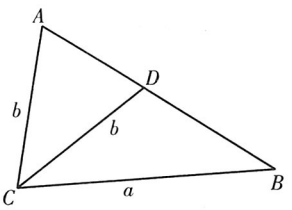
5. B 【解析】解法一：设$AC=x$，则$AB=2x$，在三角形ABC中由余弦定理得$BC^2=x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos 120°=7x^2$，所以$\cos C=\frac{x^2+7x^2-4x^2}{2\cdot x\cdot\sqrt{7}x}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以$\sin\angle ADC=\sin(60°+C)=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，在$\triangle ADC$中由正弦定理得$\frac{AD}{\sin C}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，即$\frac{AD}{\frac{\sqrt{21}}{7}}=\frac{x}{\frac{3\sqrt{21}}{14}}$，所以$AD=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\times\frac{AB}{2}=\frac{AB}{3}$，所以$AB=3AD$，故选 B.

解法二：由角平分线张角定理得：$\cos\frac{\angle BAC}{2}=\cos 60°=\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow AB=3AD$，故选 B.

6. B 【解析】解法一：因为$a=\frac{\sqrt{5}}{2}b$，所以由正弦定理得$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin B$①，又因为$A=2B$，所以$\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$②，由①②可得$\frac{\sqrt{5}}{2}\sin B=2\sin B\cos B$，约掉$\sin B$可得$\cos B=\frac{\sqrt{5}}{4}$，故选 B.

解法二：由倍角定理得：$A=2B\Rightarrow a^2=b(b+c)\Rightarrow\frac{5b^2}{4}=b(b+c)\Rightarrow c=\frac{1}{4}b$，根据余弦定理可得：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{5}}{4}$，故选 B.

7. B 【解析】因为$a\sin A+b\sin B-c\sin C=4b\sin B\cos C$，所以由正弦定理得$a^2+b^2-c^2=4b^2\cos C=4b^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即$1=\frac{2b}{a}$，则$a=2b$，$CD$是角$C$的角平分线，且$CD=b$，



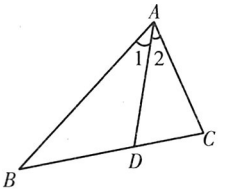
解法一：由三角形的面积公式得$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，即$\frac{1}{2}b\cdot b\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{2}a\cdot b\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}a\cdot b\sin C$，即$b^2\sin\frac{C}{2}+2b^2\sin\frac{C}{2}=2b^2\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，即$1+2=4\cos\frac{C}{2}$，即$\cos\frac{C}{2}=\frac{3}{4}$，即$\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$，故选 B.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

解法二：由斯库顿定理得：$b^2=ab-AD\cdot BD\Rightarrow AD\cdot BD=b^2\Rightarrow AB^2=(3AD)^2=\frac{9b^2}{2}$，根据余弦定理，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-AB^2}{2ab}=\frac{4b^2+b^2-\frac{9b^2}{2}}{4b^2}=\frac{1}{8}$，故选 B.

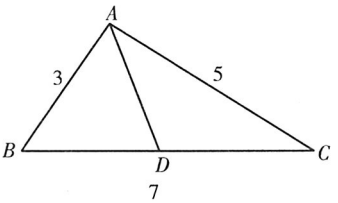
8. D 【解析】解法一：如图所示，因为在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle A$ 的平分线，$AB=2AC$，所以 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=2$，所以 $\angle 1=\angle 2$. 令 $AC=a$，$DC=b$，$AD=c$，则 $AB=2a$，$BD=2b$. 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，分别利用余弦定理可得：



$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle 1$，$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle 2$，所以 $4b^2=4a^2+c^2-4ac\cos\angle 1$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\angle 2$，化为 $3c^2-4ac\cos\angle 1=0$，又 $a=tc$，所以 $t=\frac{3}{4\cos\angle 1}$，因为 $\angle 1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\angle 1\in(0,1)$. 所以 $t\in\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$. 故选 D.

解法二：根据角平分线张角定理得：$\cos\frac{\angle BAC}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2t}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4t}$，因为 $\cos\frac{\angle BAC}{2}\in(0,1)$，所以 $0<\frac{3}{4t}<1$，所以 $t\in\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$. 故选 D.

9. C 【解析】解法一：因为 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{5}$，又 $BD+DC=7$，所以 $DC=\frac{35}{8}$，$BD=\frac{21}{8}$，在三角形 ABC 中由余弦定理得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{3^2+7^2-5^2}{2\times 3\times 7}=\frac{33}{42}=\frac{11}{14}$，在三角形 ABD 中，由余弦定理得：$AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\times\frac{11}{14}=3^2+\left(\frac{21}{8}\right)^2-2\times\frac{21}{8}\times 3\times\frac{11}{14}=\frac{225}{64}$，所以 $AD=\frac{15}{8}$. 故选 C.



解法二：利用角平分线定理 $\begin{cases}BD+DC=7\\ \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow BD=\frac{21}{8}$，$CD=\frac{35}{8}$，根据斯库顿定理：$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$. 代入数据得：$AD=\frac{15}{8}$. 故选 C.

10. A 【解析】因为 $b^2-a^2=ac$，所以由正弦定理得，$\sin^2B-\sin^2A=\sin A\sin C$，可得 $\frac{1-\cos 2B}{2}-\frac{1-\cos 2A}{2}=\sin A\sin C$，可得 $\frac{\cos 2A-\cos 2B}{2}=\sin A\sin C$，所以由和差化积公式得 $\cos 2A-\cos 2B=-2\sin(A+B)\sin(A-B)$，代入上式得，$-\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin A\sin C$，因为 $\sin(A+B)=\sin C\neq 0$，所以 $-\sin(A-B)=\sin A$，即 $\sin(B-A)=\sin A$，所以在 $\triangle ABC$ 中，$B-A=A$，得 $B=2A$，则 $C=\pi-3A$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<2A<\frac{\pi}{2}\\ 0<\pi-3A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，所以解得：$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos A\sin B-\sin A\cos B}{\sin A\sin B}=\frac{\sin(B-A)}{\sin A\sin B}=\frac{1}{\sin B}$，因为由 $\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$ 得，$\sin B\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，则 $\frac{1}{\sin B}\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $\frac{1}{\tan A}-\frac{1}{\tan B}$ 取值范围是 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，故选 A.

注意：此题可以直接用倍角定理得出 $B=2A$，能大大简化计算.

11. B 【解析】在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$，$\angle B\in(30°,45°)$，$\cos B\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\cos^2B\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

获取更多资料加qq群698274639

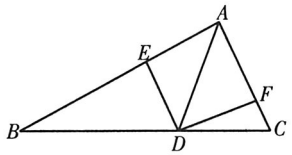
 获取更多资料加qq群698274639

解法一：由正弦定理可知：$\frac{b}{b+c}=\frac{\sin B}{\sin B+\sin C}=\frac{\sin B}{\sin B+\sin(\pi-3B)}=\frac{\sin B}{\sin B+3\sin B-4\sin^3 B}=\frac{1}{4\cos^2 B}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，故选 B.

解法二：由倍角定理得 $\angle A=2\angle B\Rightarrow a^2=b(b+c)\Rightarrow\frac{b}{b+c}=\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^2=\frac{1}{4\cos^2 B}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$，故选 B.

12. B 【解析】过点 D 分别作 AB 和 AC 的垂线，垂足分别为 E，F，因为由 $BD\cdot\sin B=CD\cdot\sin C$，可得：$DE=DF$，则 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=2$.

解法一：又 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，即 $\frac{8+4-AB^2}{2\times2\times2\sqrt{2}}=-\frac{2+4-AC^2}{2\times2\times\sqrt{2}}$，所以解得 $AC=2$，所以在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle BAC=\frac{4^2+2^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times4\times2}=\frac{1}{8}$，所以 $\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{7}}{2}$. 故选 B.



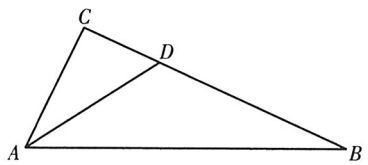
解法二：根据斯库顿定理，$AD^2=AB\cdot AC-CD\cdot BD\Rightarrow AB\cdot AC=2b^2=AD^2+CD\cdot BD=8$，根据余弦定理，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{8}$，所以 $\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{7}}{2}$. 故选 B.

13. 【解析】如图所示，则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin120°=\frac{1}{2}a\cdot2\sin60°+\frac{1}{2}c\cdot2\sin60°$，即 $ac=2a+2c$，得 $\frac{2}{a}+\frac{2}{c}=1$，得 $4a+c=(4a+c)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{c}\right)=\frac{2c}{a}+\frac{8a}{c}+10\geqslant2\sqrt{\frac{2c}{a}\cdot\frac{8a}{c}}+10=8+10=18$，当且仅当 $\frac{2c}{a}=\frac{8a}{c}$，即 $c=2a$ 时取等号；所以 $4a+c$ 的最小值为 18. 故答案为 18.

14. 【解析】解法一：根据题意，在 $\triangle ABC$ 中，$b=6$，$c=4$，$A=2B$；由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{a}{2\sin B\cos B}=\frac{6}{\sin B}$，变形可得 $\cos B=\frac{a}{12}$，又由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2-20}{8a}$，则有 $\frac{a^2-20}{8a}=\frac{a}{12}$，解可得 $a=2\sqrt{15}$.

解法二：由倍角定理得：$A=2B\Rightarrow a^2=b(b+c)=60\Rightarrow a=2\sqrt{15}$

15. 【解析】解法一：因为 $\angle C=90°$，内角 A 的平分线 AD 的长为 7，则 $\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\frac{7}{18}$，



所以 $\cos A=\frac{7}{18}$，可得：$2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{7}{18}$，解得：$\cos\frac{A}{2}=\frac{5}{6}$，所以 $\cos\angle CAD=\frac{5}{6}$，所以 $\cos\angle DAB=\frac{5}{6}$，$\sin\angle DAB=\sqrt{1-\cos^2\angle DAB}=\frac{\sqrt{11}}{6}$，又因为 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{5\sqrt{11}}{18}$，所以 $\sin\angle ADB=\sin(\angle B+\angle DAB)=\sin\angle B\cos\angle DAB+\cos\angle B\sin\angle DAB=\frac{7}{18}\times\frac{5}{6}+\frac{5\sqrt{11}}{18}\times\frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{5}{6}$，所以在 $\triangle ADB$ 中，由正弦定理 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle B}$，可得：$\frac{AB}{\frac{5}{6}}=\frac{7}{\frac{7}{18}}$，解得：$AB=15$. 故答案为 $\frac{15}{6}$，15.

解法二：令 $\angle CAD=\angle DAB=\alpha$，则 $\frac{\sin2\alpha}{AD}=\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\alpha}{c}\Rightarrow\frac{2\cos\alpha}{7}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{7}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$，由于 $b=7\cos\alpha$，$c=\frac{b}{\sin B}=\frac{7\cos\alpha}{\frac{7}{18}}=18\cos\alpha$，故 $\cos\alpha=\frac{7}{2}\left(\frac{1}{7\cos\alpha}+\frac{1}{18\cos\alpha}\right)\Rightarrow\cos\alpha$

 获取更多资料加qq群698274639

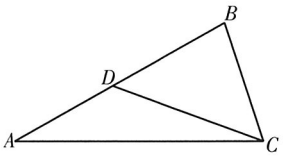
获取更多资料加qq群698274639

$=\frac{5}{6}$，$AB=18\cos\alpha=15$.

16. 【解析】解法一：因为 $BC=2\sqrt{3}$，$A=60°$，$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以解得：$AB\cdot AC=8$①，因为由余弦定理 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$，可得：$12=AB^2+AC^2-AB\cdot AC=(AB+AC)^2-3AB\cdot AC=(AB+AC)^2-3\times 8$，所以解得：$AB+AC=6$ ② 所以由 ① ② 联立解得：$\begin{cases}AB=4\\AC=2\end{cases}$，或 $\begin{cases}AB=2\\AC=4\end{cases}$（由于 $AB>AC$，舍去）. 所以 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{16+12-4}{2\times 4\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{1}{2}$，因为 AM 为角平分线，可得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{MC}=\frac{4}{2}$，且 $BM+MC=2\sqrt{3}$，所以解得：$BM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理可得：$AM=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B}=\sqrt{16+\frac{48}{9}-2\times 4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$，$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

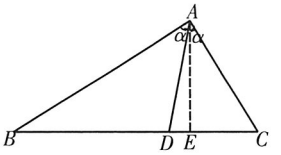
解法二：根据灵动椭圆焦点三角形面积公式可得：$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}=\frac{1}{4}[(b+c)^2-a^2]\tan\frac{A}{2}\Rightarrow b+c=6$，再根据万能辅助角公式 $b+c=6=\frac{a}{\sin A}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\sin\left(B+\frac{A}{2}\right)\Rightarrow\sin(B+30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow B=30°$（$B$ 为小角）$\Rightarrow\sin B=\frac{1}{2}$，易知 $C=90°$，$AC=2$，$AB=4$，根据角平分线张角定理 $\cos\frac{\angle BAC}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{AM}{AB}+\frac{AM}{AC}\right)\Rightarrow AM=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

17. 【解析】解法一：因为 $A:B=1:2$，即 $B=2A$，所以 $B>A$，所以 $AC>BC$，因为角平分线 CD 把三角形面积分成 5∶3 两部分，所以由角平分线定理得：$BC:AC=BD:AD=3:5$，所以由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，得 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{3}{5}$，整理得 $\frac{\sin A}{\sin 2A}=\frac{\sin A}{2\sin A\cos A}=\frac{3}{5}$，则 $\cos A=\frac{5}{6}$. 故答案为 $\frac{5}{6}$.



解法二：根据倍角定理 $B=2A\Rightarrow b^2=a(a+c)$，角平分线 CD 把三角形面积分成 5∶3 两部分，所以由角平分线定理得：$a:b=3:5$，所以 $a:b:c=3:5:\frac{16}{3}$，根据余弦定理可知：$\cos A=\frac{5}{6}$. 故答案为 $\frac{5}{6}$.

18. 【解析】解法一：$\triangle ABC$ 中，角 A 的平分线交 BC 于点 D，$BD=2CD=2$，如图所示；则 $CD=1$，由三角形内角平分线定理得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}=2$，设 $AC=x$，$\angle BAC=2\alpha$，则 $AB=2x$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$；由余弦定理得，$3^2=4x^2+x^2-2\cdot 2x\cdot x\cdot\cos 2\alpha$，即 $9=5x^2-4x^2\cos 2\alpha$，解得 $x^2=\frac{9}{5-4\cos 2\alpha}$；$S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x\cdot\sin 2\alpha=x^2\sin 2\alpha=\frac{9\sin 2\alpha}{5-4\cos 2\alpha}=\frac{9\cdot\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{5-4\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}=\frac{18\tan\alpha}{1+9\tan^2\alpha}=\frac{18}{\frac{1}{\tan\alpha}+9\tan\alpha}\leqslant\frac{18}{2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha}\cdot 9\tan\alpha}}=3$，当且仅当 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ 时“=”成立；所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 3. 故答案为 3.



解法二：根据斯库顿定理，$AD^2=AB\cdot AC-CD\cdot BD=2AC^2-2$，令 $AC=x$，作 $AE\perp BC$ 于 E，设 $EC=y$，则 $AD^2-DE^2=AC^2-EC^2\Rightarrow y=\frac{3-x^2}{2}$，$AE^2=x^2-y^2=-\frac{x^4}{4}+\frac{5x^2}{2}-\frac{9}{4}\leqslant 4$，当仅当 $x^2=5$ 时等号成立，故 $S_{\triangle ABC}$ 最大值为 $\frac{3\times 2}{2}=3$. 故答案为 3.

19. 【解析】(1) 证明：根据题意，在 $\triangle ABC$ 中，a

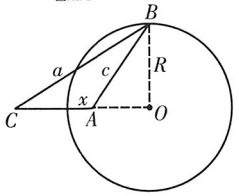
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$+2a\cos B=c$，由正弦定理知 $\sin A+2\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即 $\sin A=\cos A\sin B-\sin A\cos B=\sin(B-A)$. 因为 A，$B\in(0,\pi)$，所以 $B-A\in(-\pi,\pi)$，且 $A+(B-A)=B\in(0,\pi)$，所以 $A+(B-A)\neq\pi$，所以 $A=B-A$，$B=2A$；(2)由(1)知 $A=\frac{B}{2}$，$C=\pi-A-B=\pi-\frac{3B}{2}$. 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $\begin{cases}0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}\\0<B<\frac{\pi}{2}\\0<\pi-\frac{3B}{2}<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，得 $\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\cos B<\frac{1}{2}$，由 $a+2a\cos B=2$ 得 $a=\frac{2}{1+2\cos B}$，又由 $0<\cos B<\frac{1}{2}$，则 $a=\frac{2}{1+2\cos B}\in(1,2)$.

20. 【解析】(1)在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$，$\angle C=\pi-\frac{3\angle A}{2}$ 且 $\angle A\in(0,\pi)$，由正弦定理 $\sqrt{2}=\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin A}{\sin\frac{3A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos A+\cos\frac{A}{2}\sin A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos A+2\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{4\cos^2\frac{A}{2}-1}$，解方程 $4\cos^2\frac{A}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{A}{2}-1=0$ 得 $\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍负），所以，$\angle A=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(2)解法一：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{3c^2-4}{2\sqrt{2}c^2}$，$S_{\triangle ABC}=\left(\frac{1}{2}ac\sin B\right)^2=\frac{1}{4}a^2c^2\sin^2B=\frac{1}{4}a^2c^2(1-\cos^2B)=\frac{1}{4}\times2c^4\times\frac{-c^4+24c^2-16}{8c^4}=\frac{-(c^2-12)^2}{16}+8$，所以当 $c^2=12$ 即 $c=2\sqrt{3}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取得最大值为 8，此时 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$.



解法二：过点 B 作角 B 平分线 BM，由角平分线定理，$\sqrt{2}=\frac{a}{c}=\frac{CM}{AM}=\frac{\sqrt{2}x}{x}$，则 $x=\frac{2}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}-2$. 由阿波罗尼奥斯圆定义，点 B 在以内外角平分线的分点 M，N 为直径的圆上，$\triangle ABC$ 面积最大时，点 B 最高. 根据勾股定理：$\begin{cases}c^2-R^2=(R-x)^2\\2c^2-R^2=(R+\sqrt{2}x)^2\end{cases}$，所以 $\begin{cases}c^2-R^2=R^2-2xR+x^2\\2c^2-R^2=2x^2+2\sqrt{2}xR+R^2\end{cases}$ 所以 $2R^2=2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)xR$，所以 $R=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)x=2\sqrt{2}$. 所以 $\triangle ABC$ 面积最大为 $2\sqrt{2}$，此时 $c=2\sqrt{3}$.

专题 6　新三板斧之斯特瓦尔特定理到极化恒等式

达标训练

1. B 【解析】解法一：设 $AD=t$，可得 $BD=2t$，$BC=\sqrt{4t^2-25}$，在直角三角形 BCD 中，可得 $\cos B=\frac{\sqrt{4t^2-25}}{2t}$，在三角形 ABC 中，可得 $\cos B=\frac{4t^2-25+9t^2-75}{2\cdot3t\cdot\sqrt{4t^2-25}}$，即为 $\frac{\sqrt{4t^2-25}}{2t}=\frac{4t^2-25+9t^2-75}{2\cdot3t\cdot\sqrt{4t^2-25}}$，即 $2(4t^2-25)=9t^2-75$，解得 $t=5$，可得 $AD=5$，故选 B.

解法二：设 $AD=t$，可得 $BD=2t$，$BC=\sqrt{4t^2-25}$，由斯特瓦尔特定理得，$CD^2=25=\frac{AC^2\cdot BD+BC^2\cdot AD}{AB}-AD\cdot DB=\frac{75\times2t+(4t^2-25)\cdot t}{3t}-2t^2\Rightarrow t=5$，故选 B.

2. B 【解析】解法一：$\triangle ABC$ 中，因为 $\angle A=\frac{\pi}{4}$，BC 边上的中线 AD 长为 $\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，设 $AB=c$，$AC=b$，平方可得 $2=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2cb\cdot\sin\frac{\pi}{4})$，化简可得，$c^2+b^2+\sqrt{2}bc=8\geqslant2bc+\sqrt{2}bc$，所以 $bc\leqslant\frac{8}{2+\sqrt{2}}=4(2-\sqrt{2})$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{1}{2}\cdot4(2-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}-2$，故选 B.

解法二：极化恒等式 + 中线≥高，由于 AD 为中

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

线，故 $AD \geqslant h$ 恒成立，当仅当 $AB = AC$ 时等号成立，此时有 $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$，且 $AD = AB\cos\angle BAD = AB\cos\frac{\pi}{8} \Rightarrow 2 = AB^2 \cdot \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} \Rightarrow AB^2 = 8 - 4\sqrt{2}$，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max} = \frac{AB^2 \sin\frac{\pi}{4}}{2} = 2\sqrt{2} - 2$，故选 B.

3. D 【解析】设 $BD = x$，则 $AD = 3x$，$AC = 2 - 3x$，$BC = 2 - x$，解法一：$\cos\angle ADC = -\cos\angle BDC$，由余弦定理可得：$\frac{9x^2 + 2 - (2-3x)^2}{2 \times \sqrt{2} \times 3x} = -\frac{x^2 + 2 - (2-x)^2}{2 \times \sqrt{2} \times x}$，解得 $x = \frac{1}{3}$，故 $AD = 1$，$AC = 1$，所以 $\cos A = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \times AC} = 0$. 故选 D.

解法二：根据斯特瓦尔特定理 $CD^2 = 2 = \frac{BC^2 \cdot AD + AC^2 \cdot BD}{AB} - BD \cdot DA = \frac{(2-x)^2 \cdot 3x + (2-3x)^2 \cdot x}{4x} - 3x^2$ 所以 $x = \frac{1}{3}$，所以 $\cos A = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2AD \times AC} = 0$. 故选 D.

4. 【解析】由正弦定理可得：$bc + a^2 = b^2 + c^2$，所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$，又 $A \in (0, \pi)$，所以 $A = \frac{\pi}{3}$，解法一：由 $BD = 2DC$，可得 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，两边平方，可得 $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{1}{9}c^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{4}{9}bc\cos A = \frac{1}{9}c^2 + \frac{4}{9}b^2 + \frac{2}{9}bc = \frac{1}{9}(c+2b)^2 - \frac{2}{9}bc \geqslant \frac{1}{9}(c+2b)^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{2b+c}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}$，当且仅当 $c = 2b = 2$ 时取等号，所以可得 $AD_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

解法二：斯特瓦尔特定理 + 余弦定理，$AD^2 = \frac{c^2 \cdot CD + b^2 \cdot BD}{BC} - BD \cdot DC \Rightarrow \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{9}a^2$，再根据余弦定理，$c^2 + b^2 - a^2 = 2bc\cos A = bc$，得：$a^2 = c^2 + b^2 - bc$，所以 $AD^2 = \frac{2}{3}b^2 + \frac{1}{3}c^2 - \frac{2}{9}a^2 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{9}c^2 + \frac{2}{9}bc = \frac{1}{9}(c+2b)^2 - \frac{2}{9}bc \geqslant \frac{1}{9}(c+2b)^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{2b+c}{2}\right)^2 = \frac{4}{3}$，当且仅当 $c = 2b = 2$ 时取等号，所以可得 $AD_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

解法三：倍长定比分线，如图所示，延长 AD，过 C 作 AB 平行线交 AD 延长线于 E，易知 $CE = \frac{c}{2}$，$DE = \frac{AD}{2}$，$\angle ACE = 120°$，根据余弦定理，$AC^2 + CE^2 + AC \cdot CE = b^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{bc}{2} = \left(\frac{3}{2}AD\right)^2 \geqslant \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 = 3$，当且仅当 $c = 2b = 2$ 时取等号，所以可得 $AD_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. 【解析】解法一：设 $BD = CD = x$，$AB = y$，根据余弦定理有 $\begin{cases} \sqrt{3}xy = x^2 + y^2 - 1 \\ 2\sqrt{3}xy = 4x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$，可得 $2x = \sqrt{3}y$，回代可得：$x = \sqrt{3}$，$y = 2$，可得：$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

解法二：由中线定理得：$AD^2 + BD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} \Rightarrow AB^2 = 2BD^2 - 2$，根据余弦定理可得：$AB^2 + BD^2 - AD^2 = 2AB \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{3}$，可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$.

6. 【解析】解法一：在 $\triangle ABC$ 中，D 是 AC 边上的点，且 $AB = AD$，$BD = \frac{\sqrt{6}}{2}AD$，则在 ΔABD 中，利用余弦定理可得 $\cos A = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2AD \cdot AB} = \frac{AD^2 + AD^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}AD\right)^2}{2AD \cdot AD} = \frac{1}{4}$，由于 $0 < A < \pi$，则 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$，在 $\triangle ABC$ 中，利用正弦定理 $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$，$AB = AD$，$BC = 2AD$，解得：$\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

解法二：根据斯特瓦尔特定理，令 $AD = AB = x$，则 $BD = \frac{\sqrt{6}}{2}x$，$BC = 2x$，$CD = mx$，$AC = (m+1)x$，$BD^2 = \frac{3}{2}x^2 = \frac{x^2 \cdot mx + 4x^2 \cdot x}{(m+1)x} - mx^2$ $\Rightarrow m = 1$ 或 $m = -\frac{5}{2}$（舍），$\cos C =$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{(2x)^2+(2x)^2-x^2}{2\cdot 2x\cdot 2x}=\frac{7}{8}$，则 $\sin C=\frac{\sqrt{15}}{8}$.

7. 【解析】(1)因为向量 $\boldsymbol{m}=(2a-c,\ b)$ 与向量 $\boldsymbol{n}=(\cos C,\ \cos B)$ 共线. 所以 $(2a-c)\cos B-b\cos C=0$. 即 $2\sin A\cos B=\sin(B+C)=\sin A$. 因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. 因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$；(2)在 $\triangle ABC$ 中，$b=3\sqrt{7}$，$a=3$，$B=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9+c^2-63}{2\times 3\times c}=\frac{1}{2}$. 所以 $c^2-3c-54=0$，解得 $c=9$，(负值舍去)因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$，所以 $DC=\frac{1}{3}b=\sqrt{7}$，在 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理 $BD^2=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cdot\cos C=10$. 所以 $BD=\sqrt{19}$.

8. 【解析】(1)因为 $b=4\sqrt{2}<6=c$，所以 B 为锐角. 因为 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{1}{3}$. 所以 $(4\sqrt{2})^2=6^2+a^2-12a\times\frac{1}{3}$，化为 $a^2-4a+4=0$，解得 $a=2$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 6\times 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$；(2)$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$AD=3\sqrt{2}$，设 $CD=x$，则 $BD=2x$. 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 中，分别利用余弦定理可得：$\cos B=\frac{6^2+4x^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times 6\times 2x}=\frac{6^2+(3x)^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times 6\times 3x}$，解得 $x=\frac{\sqrt{69}}{3}$. 所以 $BC=\sqrt{69}$.

专题7　新三板斧之托勒密定理

达标训练

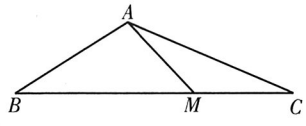
1. A 【解析】根据 $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{|AD|}{b}+\frac{|AD|}{c}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{8}\Rightarrow\cos A=-\frac{7}{16}$，故选 A.

2. D 【解析】解法一：因为 $A=2B$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$b=3$，所以 $a=6\cos B$，所以 $a=6\cdot\frac{a^2+1-9}{2a}$，所以 $a=2\sqrt{3}$，故选 D.

解法二：根据倍角定理：$A=2B\Rightarrow a^2=b(b+c)=12$，所以 $a=2\sqrt{3}$，故选 D.

3. B 【解析】根据倍角定理，锐角 $\triangle ABC$ 中，因为 $b^2=c^2+ac$，所以 $B=2C$，所以 $b>c$，可得：$\frac{b}{c}>1$，又因为 $A+B+C=\pi$，A，B，C 均为锐角，由于：$3C+A=\pi$，所以 $0<2C<\frac{\pi}{2}$，$0<C<\frac{\pi}{4}$. 再根据 $\frac{\pi}{2}<3C$，可得 $\frac{\pi}{6}<C$，所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{b}{c}<\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，综上可得，$1<\frac{b}{c}<2$，故 $\frac{b}{c}$ 的取值范围是为 $(1,\ 2)$. 故选 B.

4. A 【解析】解法一：如图，设 $MC=x$，则 $BM=2x$，$BC=3x$，$\cos\angle AMC=\frac{16+x^2-49}{2\times 4\times x}=\frac{x^2-33}{8x}$，$\cos\angle AMB=\frac{16+4x^2-36}{2\times 4\times 2x}=\frac{x^2-5}{4x}$，因为 $\angle AMC+\angle AMB=\pi$，所以 $\cos\angle AMB+\cos\angle AMB=0$，所以 $3x^2=43$，所以 $x=\frac{\sqrt{129}}{3}$，所以 $BC=3x=\sqrt{129}$. 故选 A.



解法二：根据斯特瓦尔特定理，$AM^2=16=\frac{AB^2\cdot MC+AC^2\cdot BM}{BC}-BM\cdot MC=\frac{36x+49\cdot 2x}{3x}-2x^2\Rightarrow x=\frac{\sqrt{129}}{3}$ 所以 $BC=3x=\sqrt{129}$. 故选 A.

5. B 【解析】所以 $\begin{cases}b^2+c^2=2\left(|AD|^2+\frac{a^2}{4}\right)=20\Rightarrow a=2\sqrt{3}\\ \overrightarrow{bc}=bc\cos A=|AD|^2-\frac{a^2}{4}=4\Rightarrow\cos A=\frac{1}{2}\end{cases}$，故选 B.

6. 【解析】由题意得 $\frac{1}{2}ac\sin 120^\circ=\frac{1}{2}a\sin 60^\circ+\frac{1}{2}c\sin 60^\circ$，即 $ac=a+c$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，得 $4a+c=(4a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}+5\geqslant 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}+5=4+5=9$，当且仅当 $\frac{c}{a}=\frac{4a}{c}$，即

获取更多资料加qq群698274639

$c=2a$ 时，取等号.

7. 【解析】设 $AD=x$，由 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ 可得 $2bc=b+c\geqslant 2\sqrt{bc}\Rightarrow bc\geqslant 1$，又 $a=1$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\geqslant\frac{2bc-1}{2bc}\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$ 得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}cx\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bc\sin\frac{A}{2}$，所以 $x=\frac{2bc}{c+b}\cos\frac{A}{2}=\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

8. 【解析】$S=\frac{1}{2}bc\sin A=b^2\sin A$，可知 $c=2b$，即 $\frac{c}{b}=2$. 由角分线定理可知，$BD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{|AD|}{b}+\frac{|AD|}{c}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2b}$（角平分线张角定理）；在等腰 $\triangle ABD$ 中，$\cos\frac{A}{2}=\frac{b}{|AD|}=\frac{\sqrt{3}b}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2b}$，解得 $b=1$.

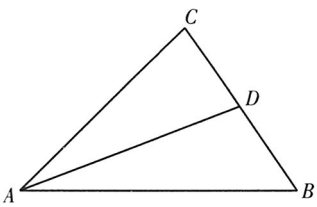
9. 【解析】因为由题意可得：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin 150°=\frac{1}{4}ac=\sqrt{3}$，所以解得 $ac=4\sqrt{3}$，设 $BD=x$，根据张角定理得 $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2c}+\frac{\sqrt{3}}{2a}$，可得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}c}$，当且仅当 $a=\sqrt{3}c$ 时，设 $BD=x$，根据张角定理得 $\frac{1}{2x}=\frac{1}{2c}+\frac{\sqrt{3}}{2a}$，可得：$x=\frac{4\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}c}$，当且仅当 $a=\sqrt{3}c$ 时 x 最得最大值，所以 $a=2\sqrt{3}$，$c=2$，所以由余弦定理可得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times 2\times 2\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=28$，所以解得：$AC=2\sqrt{7}$.

10. 【解析】设 $AD=x$，由 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，即为 $\frac{1}{2}cx\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}bx\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，可得 $(b+c)x=8\sqrt{3}$，$bc=8$，由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc$，即为 $12=(b+c)^2-24$，可得 $b+c=6$，可得 $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

11. 【解析】解法一：因为 $b=2$，$c=3$，$C=2B$，所以由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，可得 $\frac{2}{\sin B}=\frac{3}{\sin C}$，可得 $\frac{2}{\sin B}=\frac{3}{\sin 2B}=\frac{3}{2\sin B\cos B}$，所以可得 $\cos B=\frac{3}{4}$，可得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以可得 $\sin C=\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，$\cos C=\cos 2B=2\cos^2 B-1=\frac{1}{8}$，所以 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 3\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

解法二：根据倍角定理，$b=2$，$c=3$，$C=2B\Rightarrow c^2=b(b+a)\Rightarrow a=\frac{5}{2}$，令 $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{15}{4}$，再根据海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{15}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{15\sqrt{7}}{16}$.

12. 【解析】解法一：$AB=3AC$，且 $AD=kAC$，可设 $AC=t$，则 $AB=3t$，$AD=kt$，$\angle BAD=\alpha$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，即为 $\frac{1}{2}t\cdot 3t\cdot\sin 2\alpha=\frac{1}{2}t\cdot kt\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot kt\cdot 3t\cdot\sin\alpha$，化为 $3\sin 2\alpha=6\sin\alpha\cos\alpha=4k\sin\alpha$，$\sin\alpha>0$，即为 $k=\frac{3}{2}\cos\alpha$，由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，可得 $0<\cos\alpha<1$，可得 k 的范围是 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.



解法二：根据角平分线张角定理得：$\cos\frac{\angle BAC}{2}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{AD}{AB}+\frac{AD}{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}+k\right)=\frac{2}{3}k\right.$，因为 $\cos\frac{\angle BAC}{2}\in(0,1)$，所以 $0<\frac{2k}{3}<1$，所以

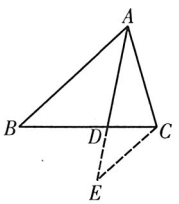
$k \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

13. 【解析】取 AC 中点 D，由 $|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}|=3\sqrt{2}$，得 $|\overrightarrow{AC}|=b=3\sqrt{2}$，$AB\cdot BC\cdot\cos B=ac\cos B=ac=4$，根据极化恒等式得 $ac=4=|BD|^2-\frac{b^2}{4}=|BD|^2-\frac{9}{2}\Rightarrow|BD|=\frac{\sqrt{34}}{2}$，由于 $|BD|=\frac{\sqrt{34}}{2}\geqslant h$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bh\leqslant\frac{1}{2}b|BD|=\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

14. 【解析】因为 $AB=1$，$AD=5$，$\angle ABC=45°$，所以在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理可得：$\sin\angle ADB=\frac{AB\cdot\sin\angle ABC}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 因为在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle ABC$，可得：$25=1+BD^2-2\times1\times BD\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，即：$BD^2-\sqrt{2}BD-24=0$，所以解得 $BD=4\sqrt{2}$，或 $-3\sqrt{2}$（舍去），因为 $|AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|BD|^2)$，所以 $|AC|^2=113$.

15. 【解析】根据题意，$\triangle ABC$ 中，$\frac{1}{2}\sin B=\cos^2\frac{C}{2}$，则有 $\frac{1}{2}\sin B=\frac{1+\cos C}{2}$，变形可得 $\sin B=1+\cos C$，则有 $\cos C=\sin B-1<0$，则 C 为钝角，B 为锐角；又由 $A=\frac{\pi}{6}$，则 $B+C=\frac{5\pi}{6}$，$\sin B=1+\cos C\Rightarrow\sin\left(\frac{5\pi}{6}-C\right)=1+\cos C\Rightarrow\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=-1$，$C$ 为钝角，则 $C=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{5\pi}{6}-C=\frac{\pi}{6}$，则 $\triangle ABC$ 中，$A=B=\frac{\pi}{6}$，则有 $AC=BC$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，设 D 为 BC 中点，$|AD|=\sqrt{7}$，设 $|AC|=x$，$|CD|=\frac{x}{2}$，$|AB|=\sqrt{3}x$，根据中线定理可得：$|AC|^2+|AB|^2=2(|AD|^2+|CD|^2)$，解可得 $x=2$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC\times\sin C=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$.

16. 【解析】设 $CD=x$，则 $BD=2x$，在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理可得：$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\frac{2x}{\sin\angle BAD}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ADB}$，在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理可得：$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，即 $\frac{2}{\sin\angle ADC}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=2x$，又 $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$，所以 $\sin\angle BAD=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\angle BAD=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin\angle BAC=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\sqrt{3}+1$.



解法二：倍长定比分线，如图，延长 AD，过 C 作 AB 平行线交 AD 延长线于 E，易知 $CE=\frac{c}{2}=\sqrt{2}$，$DE=\frac{AD}{2}$，$\angle DAC=30°$，根据余弦定理得 $AC^2+AE^2-\sqrt{3}AC\cdot AE=CE^2\Rightarrow AE^2-2\sqrt{3}AE+2=0\Rightarrow AE=\sqrt{3}+1$，或 $AE=\sqrt{3}-1$（舍），所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ACD}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}AE\times AC\sin30°=\sqrt{3}+1$.

17. 【解析】解法一：在 $\triangle ABC$ 中，$AC^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cos\theta=4-2\sqrt{3}\cos\theta$，设 $\angle ACB=\alpha$，则 $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\theta}$，即 $AC\sin\alpha=\sin\theta$，在 $\triangle BCD$ 中，$BD^2=AC^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}AC\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=7-2\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}AC\sin\alpha$，所以，$BD=\sqrt{7+2\sqrt{3}(\sin\theta-\cos\theta)}=\sqrt{7+2\sqrt{6}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$，其中，$\theta\in(0,\pi)$

$BD^2=7+2\sqrt{6}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant7+2\sqrt{6}=(\sqrt{6}+1)^2$，当且仅当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时等号成立，所以，$BD\leqslant\sqrt{6}+1$.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

解法二：广义托勒密定理，$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$，当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，取得等号，设 $AC=CD=t$，$AD=\sqrt{2}t$，则 $BD\cdot t\leqslant t+\sqrt{3}\times\sqrt{2}t$，可得 $BD\leqslant\sqrt{6}+1$，当且仅当四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，BD 取得最大值 $\sqrt{6}+1$.

18. 【解析】解法一：由余弦定理得 $AB^2=1+4-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$，所以 $AB=\sqrt{5-4\cos\theta}$，所以 $AC=\sqrt{5-4\cos\theta}$，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{OB}{\sin\angle OAB}$，即 $\sin\angle OAB=\frac{OB\sin\theta}{AB}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，所以 $\cos\angle OAB=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，所以 $\cos\angle OAC=\cos\left(\angle OAB+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2-\cos\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}$，由余弦定理得：$OC^2=4+5-4\cos\theta-2\times2\times\sqrt{5-4\cos\theta}\times\left(\frac{2-\cos\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)=5+2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta=5+4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 时，OC 最大，OC 的最大值为 3.

解法二：广义托勒密定理，$OC\cdot AB\leqslant AC\cdot OB+AO\cdot BC$，当且仅当四边形 $OABC$ 为圆内接四边形，取得等号，设 $AB=AC=BC=t$，则 $OC\cdot t\leqslant t+2t$，可得 $OC\leqslant3$，此时 $\theta=\frac{2}{3}\pi$.

19. 【解析】解法一：如图 1，作 $AE\perp CD$ 交 CD 于 E，令 $AE=y$，$DE=x$，$\angle ACD=\theta$，则 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot|BC|\sin(\theta+60°)$，$|CA|=|CB|\Rightarrow S_{\triangle BCD}=2|CA|\sin(\theta+60°)=|CA|(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)=y+\sqrt{3}(4-x)=4\sqrt{3}+(y-\sqrt{3}x)$，由于 $x^2+y^2=4$，故令 $\angle ADC=\alpha$，$y-\sqrt{3}x=2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha=4\sin(\alpha-60°)\leqslant4$，当仅当 $\alpha=150°$ 时等号成立，则 $S_{\triangle BCD}\leqslant4\sqrt{3}+4$.

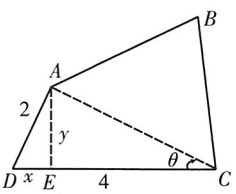


图 1

解法二：根据 $\triangle ABC$ 特征旋转，印证了初中数学几何证明的一种方法，遇等腰，即旋转. 如图 2，将 $\triangle ADC$ 绕 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle BEC$，易知 $\triangle EDC$ 为等边三角形，作 $EF\perp DC$ 于 F，则 $EF=2\sqrt{3}$，$EB=2$，故当仅当 B，E，F 三点共线时，$\triangle BDC$ 的高取得最大值 $2+2\sqrt{3}$，此时 $S_{\triangle BCD}=4+4\sqrt{3}$.

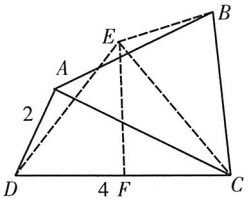


图 2

解法三：如图 3，取 AC，CD 中点 F，E，在四边形 $EFBC$ 中，根据托勒密定理 $BF\cdot EC+EF\cdot BC\geqslant BE\cdot CF$，令 $BC=a$，则有 $1\cdot a+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\geqslant\frac{1}{2}a\cdot BE\Rightarrow h\leqslant BE\leqslant2+2\sqrt{3}\Rightarrow S_{\triangle BCD}\leqslant4+4\sqrt{3}$.

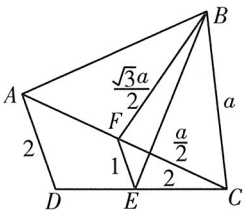


图 3

20. $4+\frac{5}{3}\sqrt{3}$

21. 【解析】(1) 因为 $AP=\sqrt{3}$，$PC=\sqrt{7}$，$\angle CAP=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$，在 $\triangle PAC$ 中，由余弦定理知：$PC^2=AP^2+AC^2-2AP\cdot AC\cos\angle CAP$，即 $7=3+AC^2-2\times\sqrt{3}\times AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $AC=4$，（负值舍去），所以在 $\triangle PAB$ 中，$PB=\frac{AB}{\sin\angle APB}$，在 $\triangle PAC$ 中，$\frac{PC}{\frac{1}{2}}=\frac{AC}{\sin\angle APC}\Rightarrow PC=\frac{AC}{2\sin\angle APC}\Rightarrow\sin\angle APC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，由于 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$，故 $\frac{\sin\angle CAB}{AP}=\frac{\sin\angle CAP}{AB}+\frac{\sin\angle PAB}{AC}$，所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{2PB\sin\angle APB}+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4PB}+\frac{1}{4}$，所

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

以 $PB=\sqrt{7}$；

(2)设 $\angle APB=\theta$，由(1)得，所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{2PB\sin\theta}+\frac{1}{2PC\sin\theta}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$，于是 $\frac{2}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{2}{PB}+\sin\theta-\frac{1}{PB}=\frac{1}{PB}+\sin\theta$，因为 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{PB}$，所以 $\frac{1}{PB}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta$，所以 $\frac{2}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{2}{PB}+\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，由题意知，$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，可得：$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，即 $\frac{2}{PB}+\frac{1}{PC}$ 的取值范围为 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

22. 【解析】解法一：因为 $2AB=3AC$，令 $AB=3t$，则 $AC=2t$，$\triangle ABC$ 中，$\cos\angle BAC=\cos60°=\frac{9t^2+4t^2-49}{2\cdot3t\cdot2t}=\frac{1}{2}$，所以 $t=\sqrt{7}$，$AB=3\sqrt{7}$，$AC=2\sqrt{7}$，由余弦定理可知 $\cos B=\frac{63+49-28}{2\times7\times3\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\sin\angle APB=\sin[\pi-(\angle B+\angle BAP)]=\sin(B+30°)=\sin B\cdot\cos30°+\cos B\cdot\sin30°=\frac{\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. 由正弦定理可知 $\frac{AP}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle APB}$，即 $\frac{AP}{\frac{\sqrt{21}}{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{\frac{5\sqrt{7}}{14}}$，求得 $AP=\frac{6\sqrt{21}}{5}$.

解法二：因为 $2AB=3AC$，令 $AB=3t$，则 $AC=2t$，$\triangle ABC$ 中，$\cos\angle BAC=\cos60°=\frac{9t^2+4t^2-49}{2\cdot3t\cdot2t}=\frac{1}{2}$，所以 $t=\sqrt{7}$，$AB=3\sqrt{7}$，$AC=2\sqrt{7}$，令 $AP=x$，由 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}=S_{\triangle ABC}$，即为 $\frac{1}{2}cx\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}bx\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}$，可得 $(b+c)x=5\sqrt{7}x=42\sqrt{3}$，$x=\frac{6\sqrt{21}}{5}$.

23. 【解析】(1)因为 $a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$B=2A$. 所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{2\sin A\cos A}$，所以 $\cos A=\frac{b}{2a}=\frac{2\sqrt{6}}{2\times3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$；(2)因为 $A\in(0,\pi)$，可得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $B=2A$，所以 $\cos B=\cos2A=2\cos^2A-1=\frac{1}{3}$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{\sqrt{6}}{9}$，所以 $\cos B>\cos C$，又因为函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，且 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $\angle B<\angle C$.

24. 【解析】(1)证明：由 $\sin(B+C)=\frac{2S}{a^2-c^2}$，即 $\sin A=\frac{2S}{a^2-c^2}$，所以 $\sin A=\frac{bc\sin A}{a^2-c^2}$，$\sin A\neq0$，所以 $a^2-c^2=bc$，因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $a^2-c^2=b^2-2bc\cos A$，所以 $b^2-2bc\cos A=bc$，所以 $b-2c\cos A=c$，所以 $\sin B-2\sin C\cos A=\sin C$，所以 $\sin(A+C)-2\sin C\cos A=\sin C$，所以 $\sin A\cos C-\cos A\sin C=\sin C$，所以 $\sin(A-C)=\sin C$，因为 $A,B,C\in(0,\pi)$，所以 $A=2C$；(2)因为 $A=2C$，所以 $B=\pi-3C$，所以 $\sin B=\sin3C$. 因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 且 $b=2$，所以 $a=\frac{2\sin2C}{\sin3C}$，所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sin2C\sin C}{\sin(2C+C)}=\frac{2\sin2C\sin C}{\sin2C\cos C+\cos2C\sin C}=\frac{2\tan2C\tan C}{\tan2C+\tan C}=\frac{4\tan C}{3-\tan^2C}=\frac{4}{\frac{3}{\tan C}-\tan C}$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}A=2C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\B=\pi-3C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$，所以 $C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，因为 $S=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{4}{\frac{3}{\tan C}-\tan C}$为增函数，所以$S\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2\right)$.

25. 【解析】(1)由题意$\sin A=\sin(135°-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 由正弦定理可得$BC=\frac{\sqrt{5}\sin A}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3$；(2)由正弦定理可得$AB=\frac{\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$，所以$2\left[\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2+|CD|^2\right]=|AC|^2+|BC|^2$ 所以$CD=\sqrt{5}$.

26. 【解析】(1)在$\triangle ABD$中，$\frac{AB}{\sin\angle BDA}=\frac{BD}{\sin\frac{\pi}{6}}$，在$\triangle ACD$中，$\frac{AC}{\sin\angle CDA}=\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}}$，相除得$AC=2AB$. 在$\triangle ABC$中，$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\frac{\pi}{3}=3AB^2=9$，所以$AB=\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；(2)因为$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$，所以

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=|AD|^2-|BD|^2\\ |AB|^2+|AC|^2=2(|AD|^2+|BD|^2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|=9\\ |AB|^2+|AC|^2=18\end{cases}$$ 所以$(AB-AC)^2=0$

即：$AB=AC$，又$\angle C=60°$，所以三角形ABC为等边三角形.

27. 【解析】(1)在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，所以$AC^2=1+3-2\sqrt{3}\cos 30°=1$，所以$AC=1$在$\triangle ACD$中，$AD^2=AC^2+DC^2=4AC^2=4$，所以$AD=2$；(2)解法一：设$AC=x$，$CD=\sqrt{3}x$，在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，$x^2=4-2\sqrt{3}\cos\theta$，因为$\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{1}{\sin\angle ACB}$，所以$\sin\angle ACB=\frac{\sin\theta}{x}$. 在$\triangle BCD$中，$BD=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}x)^2-2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle ACB\right)}=\sqrt{3+3x^2+6x\sin\angle ACB}=\sqrt{3+12-6\sqrt{3}\cos\theta+6x\frac{\sin\theta}{x}}=\sqrt{15-6\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta}=\sqrt{15+12\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)}=\sqrt{15+12\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$，因为$\theta\in(0,\ \pi)$，所以$\theta-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$，当$\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\theta=\frac{5\pi}{6}$时$BD$取到最大值$3\sqrt{3}$.

解法二：由于此题属于解答题，广义托勒密定理不能写在答题卷上，但此题可以很快算出结果，就是$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC\Rightarrow BD\cdot AC\leqslant\sqrt{3}AC+AC\cdot 2\sqrt{3}\Rightarrow BD\leqslant 3\sqrt{3}$.

28. 【解析】(1)右$=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{1-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\tan\frac{A}{2}=$左；(2)①原式$\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}+\frac{1-\cos D}{\sin D}=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}$，连接$AC$，在$\triangle ACD$和$\triangle ACB$中，所以$AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos D$，所以$36+9-2\times 3\times 3\times\cos B=25+16+2\times 5\times 4\times\cos B$，所以$4=76\cos B$，所以$\cos B=\frac{1}{19}$，因为$0<B<\pi$，所以$\sin B=\frac{6\sqrt{10}}{19}$. 连接$BD$，在$\triangle ABD$和$\triangle DBC$中$AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos A=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cdot\cos C$，所以$\cos A=\frac{3}{7}$，因为$0<A<\pi$，所以$\sin A=\frac{2\sqrt{10}}{7}$，所以原式$=\frac{2}{\sin A}+\frac{2}{\sin B}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$.

②在$\triangle ACB$和$\triangle ACD$中，由$AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos D$，所以$36+9-2\times 6\times 3\times\cos B=25+16-2\times 5\times 4\times\cos D$，所以$1-9\cos B=-10\cos D$，因为$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B+\frac{1}{2}AD\cdot DC\cdot\sin D=\frac{1}{2}\times 6\times 3\times\sin B+\frac{1}{2}\times 5\times 4\times\sin D=9\sin B+10\sin D$，所以$\begin{cases}1-9\cos B=-10\cos D\\ S-9\sin B=10\sin D\end{cases}$，平方相加$1+S^2=81+100-180\cos(B+D)$所以$S^2=180-180\cos(B+D)$，当且仅当$B+D=\pi$时，$S^2$取最大值360，所以面积的最大值为$6\sqrt{10}$.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

第4章　天龙八部定五湖　圆锥曲线满分路

专题1　焦长与焦比体系

同步训练1

1. C 【解析】$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}\cdot 2c\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，故选C.

2. A 【解析】解法一：由 $|AF|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}=2$，$|BF|=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}=\frac{6}{5}$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{4}{3}$.

解法二：由 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{a-c\cos\alpha}{b^2}+\frac{a+c\cos\alpha}{b^2}=\frac{2a}{b^2}=\frac{4}{3}$，故选A.

3. 【解析】易知 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，故 $S_{AOB}=\frac{ab^2c\sin\alpha}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{5}{3}$，故答案为$\frac{5}{3}$.

4. 【解析】$|AB|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，$|F_1A|+|F_1B|=4a-|AB|=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，故答案为$\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

5. 【解析】由 $|MF|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}$，$|NF_1|=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$或$\frac{9-4\sqrt{2}}{7}$.

6. 【解析】(1)$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$；

(2)$\frac{1}{|F_1A|}+\frac{1}{|F_1B|}=\frac{a-c\cos\alpha}{b^2}+\frac{a+c\cos\alpha}{b^2}=\frac{2a}{b^2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. 【解析】(1)$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)$S_{AOB}=\frac{ab^2c\sin\alpha}{a^2-c^2\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sin\alpha}+\sin\alpha}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，当仅当 $\alpha=90°$，S_{AOB} 最大，$l:x=1$.

8. 【解析】(1)因为 $AC\perp BD$，所以 P 是以 F_1F_2 为直径的圆，所以 $x_0^2+y_0^2=1$，所以 $\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}\leqslant\frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{2}=\frac{1}{2}$；

(2)设 BD 与 x 轴的夹角为 α，则 AC 与 x 轴的夹角为 $90°-\alpha$.

$S_{四边形ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{2ab^2}{a^2-c^2\sin^2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{48}{6+\left(\frac{\sin2\alpha}{2}\right)^2}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{48}{6+\frac{1}{4}}=\frac{96}{25}$.

同步训练2

9. B 【解析】$|MF_2|+|NF_2|-|MN|=|MF_2|+|NF_2|-(|MF_1|+|NF_1|)=|MF_2|-|MF_1|+|NF_2|-|NF_1|=4a=8$，故选B.

10. D 【解析】$\tan\alpha=2$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$a^2-c^2\cos^2\alpha<0\Rightarrow e>\frac{1}{\cos\alpha}$，$e>\sqrt{5}$，故选D.

11. C 【解析】解法一：直线 l 与右支有且只有一个交点，则此直线斜率的绝对值小于等于渐近线的斜率，即 $\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，$\frac{b}{a}\geqslant\sqrt{3}$，$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\geqslant4$，所以 $e\geqslant2$，故选C.

解法二：当直线与双曲线交于两支时，$a^2-c^2\cos^2\alpha<0\Rightarrow e>\frac{1}{\cos\alpha}=2$，由于与渐近线平行的直线也与双曲线有仅有一个交点，故 $e=2$ 时也成立，故选C.

12. 【解析】$C_{\triangle ABF_2}=4a+2l=16+12=28$. 故答案为28.

13. 【解析】$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，$C_{\triangle ABF_2}=4a+2l=8+10=18$，故答案为18.

14. 【解析】$\tan\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|AB|=\left|\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\right|=\left|\frac{2\times3\times4^2}{9-25\times\frac{1}{2}}\right|=\frac{192}{7}$.

15. 【解析】(1)$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|AB|=\left|\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\alpha}\right|=\left|\frac{2\times1\times3}{1-4\times\frac{3}{4}}\right|=3$；(2)$C_{\triangle ABF_1}=4a+2|AB|=4+2\times3=10$.

16. 【解析】$a=b=2$，$c=2\sqrt{2}$，$e=\sqrt{2}$，焦点到准线的距离 $p=\frac{b^2}{c}=\sqrt{2}$，由于直线倾斜角为150°，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

所以 $\theta=30°$，注意到 P，Q 在双曲线两支上，由焦长公式极坐标式 $|PF||FQ|=\dfrac{ep}{e\cos\theta-1}\cdot\dfrac{ep}{e\cos\theta+1}=\dfrac{e^2p^2}{e^2\cos^2\theta-1}=8\dfrac{4}{2\times\dfrac{3}{4}-1}=8$.

17. 【解析】(1)联立 $\begin{cases}y=x+1\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow(b^2-2)x^2-4x-2-2b^2=0$，$\triangle=16-4(b^2-2)(-2-2b^2)\geqslant 0$，解得 $b\geqslant 1$ 或 $b\leqslant -1$(舍)，所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2+b^2}}{\sqrt{2}}\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

(2)由于 $\overrightarrow{FP}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{FQ}$，故 P，Q 分别位于双曲线两支上，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$c\cos\alpha-a>0$，则 $\dfrac{b^2}{c\cos\alpha-a}=\dfrac{5b^2}{c\cos\alpha+a}\Rightarrow e\cos\alpha=\dfrac{5+1}{5-1}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow e=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=3$，$b=\sqrt{7}$，所以 $C:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{7}=1$.

18. 【解析】(1)$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2)设 BD 与 x 轴的夹角为 α，则 AC 与 x 轴的夹角为 $90°-\alpha$.

$S_{四边形ABCD}=\dfrac{AC\cdot BD}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\cos^2\alpha|}\cdot\dfrac{2ab^2}{|a^2-c^2\sin^2\alpha|}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{36}{\left|-3+4\cdot\left(\dfrac{\sin2\alpha}{2}\right)^2\right|}\leqslant\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{36}{|-3+1|}=9.$

同步训练 3

19. A 【解析】因为 $|AF|=\dfrac{p}{1-\cos60°}=3$，所以 $p=3(1-\cos60°)=\dfrac{3}{2}$，所以 $y^2=2px=3x$. 故选 A.

20. C 【解析】$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2x}\geqslant 2p$，故选 C.

21. C 【解析】因为 $|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=5$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{5}}=\dfrac{5}{4}$，故选 C.

22. C 【解析】因为 $p=\dfrac{1}{2}$，且 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=1$，故选 C.

23. C 【解析】因为 $|AF|=|AK|$，且 $\angle FAK=60°$，所以 AKF 为等边三角形，所以 $S_{AKF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|AF|^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{p}{1-\cos60°}\right)^2=4\sqrt{3}$，故选 C.

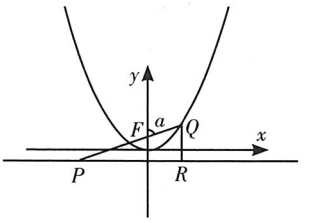
24. C 【解析】$S_{ABEF}=S_{ABF}+S_{BEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}|AF|^2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}|AF|^2=6\sqrt{3}$，故选 C.

25. C 【解析】因为 $\theta\geqslant\dfrac{\pi}{4}$. 所以 $\cos\theta\in\left(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，$|PA|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}\in\left(\dfrac{1}{4},1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，故选 C.

26. B 【解析】$|FA|=\dfrac{p}{1-\cos60°}=2p$，根据余弦定理：$|OA|^2=|FA|^2+|OF|^2-2|FA||OF|$，$\cos120°=\dfrac{21}{4}p^2$，所以 $|OA|=\dfrac{\sqrt{21}}{2}p$，故选 B.

27. A 【解析】因为 A 为焦点，所以 $|BC|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{8p}{3}=\dfrac{32}{3}$，所以 $x_P+\dfrac{p}{2}=x_P+2=\dfrac{32}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{16}{3}$，所以 $x_P=\dfrac{10}{3}$，故选 A.

28. A 【解析】如图，作 $QR\perp l$，则 $|QF|=|QR|$，因为 $\overrightarrow{PF}=2\overrightarrow{FQ}$，所以 $|PQ|=3|QR|$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$|QF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=\dfrac{4}{1-\dfrac{1}{3}}=6$，故选 A.



29. B 【解析】易知焦长 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{\sin^2\alpha}\geqslant 4$，则 $|AB|=4$ 时有仅有一条，即 $\sin\alpha=1$ 时，AB 为通径，当 $|AB|\in[5,2015]$ 时，$\sin\alpha\in(0,1)$ 时，有两解，故存在 $2011\times2=4022$ 条弦，故选 B.

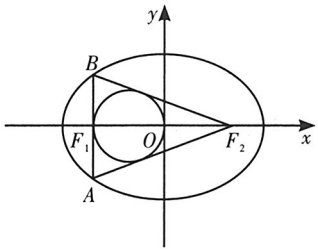
30. 【解析】$S_{AOB}=\dfrac{2P}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{p\sin\alpha}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

同步训练 4

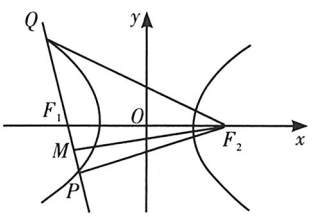
31. D 【解析】如图所示，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，令 $x=-c$，得 $y^2=b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{b^4}{a^2}$，所以 $|AB|=2|y|=\frac{2b^2}{a}=3$，又 $\triangle ABF_2$ 的内切圆面积为 $\frac{9\pi}{16}$，内切圆半径为 $r=\frac{3}{4}$，由椭圆的定义可得 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4a$，$\triangle ABF_2$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot 3=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 4a$，即有 $a=2c$，又 $3a=2b^2$，$a^2-b^2=c^2$，解得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，则 $A\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，$F_2(1,0)$，则直线 AF_2 的方程是 $y-0=-\frac{3}{4}(x-1)$，即为 $3x+4y-3=0$，故选 D.



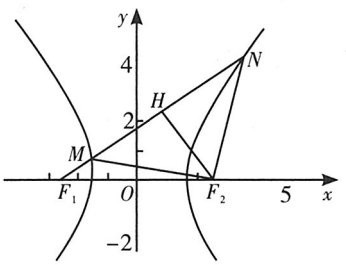
32. B 【解析】若 $|AF_1|:|AB|=3:4$，$|BF_2|=3|AF_2|$，则可设 $|AF_1|=3m$，$|AB|=4m$，$|AF_2|=\frac{1}{4}|AB|$，则 $|AF_2|=m$，$|BF_2|=3m$，由双曲线的定义，得 $|AF_1|-|AF_2|=2m=2a$，$|BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-3m=2a$，可得 $m=a$，$|BF_1|=5a$，则此时满足 $|AF_1|^2+|AB|^2=|BF_1|^2$，所以 $\triangle ABF_1$ 是直角三角形，且 $\angle F_2AF_1=90°$，所以由勾股定理，得 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，即 $(3a)^2+a^2=(2c)^2$，可得 $10a^2=4c^2$，得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故选 B.

33. A 【解析】解法一：如图，因为 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，且 $5|PF_1|=4|QF_1|$，所以 $|PF_1|=2c-2a$，$|QF_1|=\frac{5}{4}|PF_1|=\frac{5}{2}c-\frac{5}{2}a$，所以 $|QF_2|=|PF_1|+2a=\frac{5}{2}c-\frac{1}{2}a$，取 PF_1 的中点 M，则 $F_2M\perp QP$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle QMF_2$ 中，$|MF_2|^2=(2c)^2-(c-a)^2=3c^2-a^2+2ac$，$|QM|^2=\left(\frac{5}{2}c-\frac{5}{2}a+c-a\right)^2=\frac{49}{4}c^2+\frac{49}{4}a^2-\frac{49}{2}ac$，$|QF_2|^2=\frac{25}{4}c^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{5}{2}ac\Rightarrow 9c^2-20a+11a^2=0\Rightarrow a=c$（舍去）或 $9c=11a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{11}{9}$，故选 A.

解法二：因为 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，且 $5|PF_1|=4|QF_1|\Rightarrow|QF_1|=\frac{5}{4}|PF_1|$，所以 $|PF_1|=2c-2a$，$|QF_1|=\frac{\frac{5}{4}+1}{2}\frac{b^2}{a}=\frac{9b^2}{8a}$，$|PF_1|=\frac{9b^2}{8a}\times\frac{4}{5}=\frac{9b^2}{10a}$，所以 $|PF_2|=|PF_1|+2a\Rightarrow 2c=\frac{9b^2}{10a}+2a=\frac{9c^2-9a^2}{10a}\Rightarrow 9c^2-20ac+11a^2=0$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{11}{9}$，故选 A.



34. A 【解析】可得 $\triangle MNF_2$ 为等腰直角三角形，设 $|MF_2|=|NF_2|=m$，则 $|MN|=\sqrt{2}m$，由 $|MF_2|-|MF_1|=2a$，$|NF_1|-|NF_2|=2a$，两式相加可得 $|NF_1|-|MF_1|=|MN|=4a$，即有 $m=2\sqrt{2}a$，在直角三角形 HF_1F_2 中可得 $4c^2=4a^2+(2a+2\sqrt{2}a-2a)^2$，化为 $c^2=3a^2$，即 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$. 故选 A.



35. B 【解析】设 $|BF_2|=n$，由双曲线的定义可得，$|BF_1|=|BF_2|+2a=n+2a$，设 $|AF_2|=m$，有 $|AF_1|=m-2a$，即 $|AB|=4a+n-m$，$AB\perp BF_2$，可得 $(4a+n-m)^2+n^2=m^2$，$\cos\angle F_1AF_2=-\frac{4}{5}$ 即有 $\cos\angle F_2AB=\frac{4}{5}$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\sin\angle F_2AB=\frac{n}{m}=\frac{3}{5}$，解得 $n=2a$，$m=\frac{10}{3}a$，在直角三角形 BF_1F_2 中，$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2$，即有 $4c^2=(2a+n)^2+n^2=(4a)^2+4a^2$，即有 $c^2=5a^2$，即离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$. 故选 B.

36. C 【解析】如图所示，设双曲线的左焦点为 F'，连接 AF'，BF'. 因为 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，所以 $AF\perp FB$，所以四边形 $AFBF'$ 为矩形. 因此 $|AB|=|FF'|=2c$. 则 $|BF|=2c\sin\theta$，$|AF|=2c\cos\theta$.

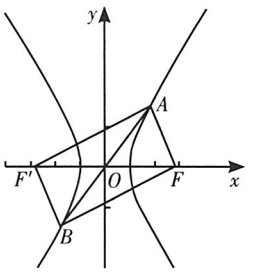
因为 $|AF'|-|AF|=2a$，

所以 $2c\sin\theta-2c\cos\theta=2a$. 即 $c(\cos\theta-\sin\theta)=-a$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$，

因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right)$，所以 $\theta-\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，

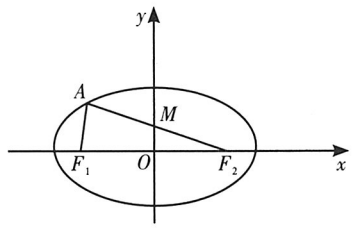
则 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}>\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$，即 $e>\sqrt{2}$，

故双曲线离心率的取值范围是 $(\sqrt{2},+\infty)$，故选 C.



37. D 【解析】设 $AF_1=m$，$AF_2=n$. 如图所示，由题意可得：$\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2\backsim\mathrm{Rt}\triangle OMF_2$，所以 $\frac{AF_1}{AF_2}=\frac{OM}{OF_2}=\frac{1}{3}$. 则 $m+n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，$n=3m$.

化为：$m^2=\frac{2b^2}{3}$，$n^2=9m^2=6b^2$. 所以 $\frac{2b^2}{3}+6b^2=4c^2$. 所以 $\frac{5(a^2-c^2)}{3}=c^2$，化为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{4}$. 故选 D.

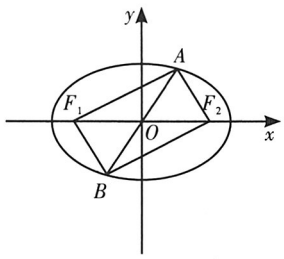


38. D 【解析】解法一：由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$，消 y 可得得 $(3a^2+b^2)x^2=a^2b^2$，解得 $x=\pm\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$，

分别代入 $y=\pm\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$，所以 $A\left(\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$，$B\left(-\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},-\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}+c,\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(c-\frac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},-\frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$，所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BF}=c^2-\frac{a^2b^2}{3a^2+b^2}-\frac{3a^2b^2}{3a^2+b^2}=0$，所以 $c^2=\frac{4a^2b^2}{3a^2+b^2}$(*)，把 $b^2=a^2-c^2$ 代入(*)式并整理得 $4a^2c^2-c^4=4a^2(a^2-c^2)$，两边同除以 a^4 并整理得 $e^4-8e^2+4=0$，解得 $e^2=4-2\sqrt{3}$，所以 $e=\sqrt{3}-1$，故选 D.

解法二：如图，易知 AF_1BF_2 为矩形，且 $AO=OF_1=OF_2=AF_2=c$，故 $AF_1=\sqrt{3}c$，$e=\frac{2c}{AF_1+AF_2}=\sqrt{3}-1$. 故选 D.



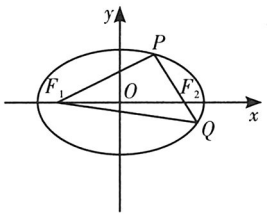
39. D 【解析】解法一：$PF_1\perp PQ$ 且 $|PF_1|=|PQ|$，可得 $\triangle PQF_1$ 为等腰直角三角形，设 $|PF_1|=t$，$|QF_1|=m$，由椭圆的定义可得 $|PF_2|=2a-t$，$|QF_2|=2a-m$，即有 $t=4a-t-m$，$m=\sqrt{2}t$，则 $t=2(2-\sqrt{2})a$，在直角三角

获取更多资料加qq群698274639

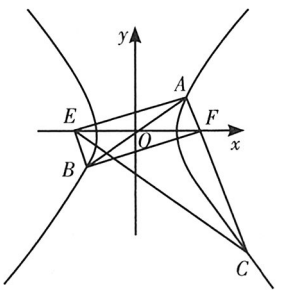
获取更多资料加qq群698274639

形 PF_1F_2 中，可得 $t^2+(2a-t)^2=4c^2$，$4(6-4\sqrt{2})a^2+(12-8\sqrt{2})a^2=4c^2$，化为 $c^2=(9-6\sqrt{2})a^2$，可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，故选 D.

解法二：如图，易知 $\angle PQF_1=45°$，则 $\lambda=\frac{S_{PF_1F_2}}{S_{QF_1F_2}}=\frac{b^2\tan 45°}{b^2\tan\frac{Q}{2}}\Rightarrow\lambda\tan\frac{Q}{2}=1$，易知 $\tan\frac{Q}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$，故 $\lambda=\sqrt{2}+1$，则 $|PF_2|=\frac{\sqrt{2}+2}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|PF_1|=\left(\frac{\lambda+1}{2}+\frac{\lambda+1}{2\lambda}\right)\frac{b^2}{a}=(\sqrt{2}+1)\frac{b^2}{a}$，所以 $PF_1:PF_2:F_1F_2=\sqrt{2}:1:\sqrt{3}$，得 $e=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，故选 D.



40. B 【解析】设双曲线的另一个焦点为 E，由题意可得在直角三角形 ABF 中，OF 为斜边 AB 上的中线，即有 $|AB|=2|OA|=2|OF|=2c$，令 $|BF|=|AE|=m$，$|AF|=n$，$|CF|=2n$，由双曲线的定义有，$|CE|-|CF|=|AE|-|AF|=2a$，所以 $CE=2n+2a$，在直角三角形 EAC 中，$m^2+(3n)^2=(2n+2a)^2$，代入 $2a=m-n$，化简可得 $m=4n$，又 $m-n=2a$ 得 $n=\frac{2}{3}a$，$m=\frac{8}{3}a$，在直角三角形 EAF 中，$m^2+n^2=(2c)^2$，即为 $\frac{4}{9}a^2+\frac{64}{9}a^2=4c^2$，可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{3}$. 故选 B.



41. D 【解析】设 $|F_1B|=k(k>0)$，则 $|AF_1|=3k$，$|AB|=4k$，所以 $|AF_2|=2a-3k$，$|BF_2|=2a-k$，因为 $AB\perp AF_2$，所以 $|BF_2|^2=|AF_2|^2+|AB|^2$，故 $a=3k$，所以 $\triangle AF_1F_2$ 是等腰直角三角形，$\Rightarrow c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，椭圆 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 D.

42. A 【解析】F_1，F_2 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF_1$ 中，$|OF_1|=c$，所以 $|AB|=2c$，在直角三角形 ABF_1 中，$\angle ABF_1=\alpha$，可得 $|AF_2|=2c\sin\alpha$，$|BF_2|=2c\cos\alpha$，取左焦点 F_1，连接 AF_1，BF_1，可得四边形 AF_2BF_1 为矩形，所以 $||BF_2|-|AF_2||=|AF_1|-|AF_1|=2c|\cos\alpha-\sin\alpha|=2a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{|\cos\alpha-\sin\alpha|}=\frac{1}{\sqrt{2}\left|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|}$，因为 $\alpha=\frac{\pi}{12}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $e=\sqrt{2}$，故选 A.

43. D 【解析】解法一：由椭圆的焦点在 x 轴上，由 F_1，H 是线段 MN 的三等分点，则 H 为 NF_1 的中点，所以 $NF_2\perp F_1F_2$，设 $N\left|c,\frac{b^2}{a}\right|$，即 $N\left|c,\frac{4}{a}\right|$，根据相似三角形的性质，$M\left|-2c,-\frac{2}{a}\right|$，将 M 代入椭圆方程：$\frac{4c^2}{a^2}+\frac{4}{4a^2}=1$，由 $c^2=a^2-b^2=a^2-4$，解得：$a^2=5$，所以 $\triangle F_2MN$ 的周长 $4a=4\sqrt{5}$，故选 D.

解法二：因为 $|NF_1|=\frac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|NF_2|=\frac{b^2}{a}$，所以 $\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a}=2a$，所以 $a^2=5$，所以 $\triangle F_2MN$ 的周长 $4a=4\sqrt{5}$，故选 D.

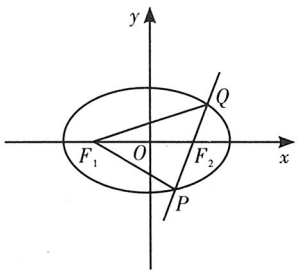
44. 【解析】解法一：如图所示，设 $|QF_2|=m$，$|PF_2|=n$，则 $|QF_1|=2a-m$，$|PF_1|=2a-n$. 因为 $4|PF_1|=3|PQ|$，所以 $4(2a-n)=3(m+n)$，因为 $PF_1\perp PQ$，所以 $(2a-n)^2+n^2=4c^2$，$(2a-n)^2+(m+n)^2=(2a-m)^2$.

联立 $\begin{cases}4(2a-n)=3(n+m)\\(2a-n)^2+n^2=4c^2\\(2a-n)^2+(m+n)^2=(2a-m)^2\end{cases}$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

化为 $n=a$，代入可得 $a^2=2c^2$．解得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$．



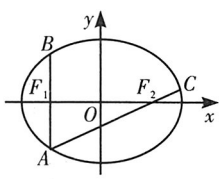
解法二：令 $|PQ|=4x$，$|PF_2|=m$，则 $|QF_1|=5x$，$|PF_1|=3x$．$\lambda=\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle QF_1F_2}}=\frac{b^2\tan 45^\circ}{b^2\tan\frac{Q}{2}}$

$\Rightarrow\lambda\tan\frac{Q}{2}=1$，易知 $\tan\frac{Q}{2}=\frac{1}{3}$，故 $\lambda=3$，则 $|PF_2|=\frac{4}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|PQ|=4x=\frac{8}{3}\cdot\frac{b^2}{a}\Rightarrow x=\frac{2b^2}{3a}$，$|PF_1|=3x=\frac{2b^2}{a}$，$PF_1:PF_2:F_1F_2=1:1:\sqrt{2}$，得 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

45. 【解析】解法一：如图，由题意，$A\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$，$F_2(c,0)$，$C(x,y)$，因为 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{F_2C}$，即为 $\left(x+c,y+\frac{b^2}{a}\right)=3(x-c,y)$，所以 $3y=y+\frac{b^2}{a}$，$x+c=3x-3c$．

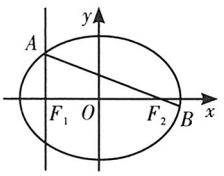
所以 $C\left(2c,\frac{b^2}{2a}\right)$，代入椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，可得 $\frac{4c^2}{a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=1$，由 $b^2=a^2-c^2$，整理得 $5c^2=a^2$，解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

解法二：因为 $|AF_2|=\frac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|AF_1|=\frac{b^2}{a}$，所以 $\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a}=2a$，所以 $4a^2=5b^2=5a^2-5c^2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．



46. 【解析】解法一：由 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，则 $AF_1\perp F_1F_2$，则 $A\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$，设 $B(x,y)$，$\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$，则 $\left(2c,-\frac{b^2}{a}\right)=\lambda(x-c,y)$，所以 $\begin{cases}2c=\lambda(x-c)\\-\frac{b^2}{a}=\lambda y\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\frac{c(\lambda+2)}{\lambda}\\y=-\frac{b^2}{a\lambda}\end{cases}$，则 $B\left(\frac{c(\lambda+2)}{\lambda},-\frac{b^2}{\lambda a}\right)$，将 B 代入椭圆方程：$\frac{c^2(\lambda+2)^2}{a^2\lambda^2}+\frac{b^2}{\lambda^2a^2}=1$，整理得：$c^2(\lambda^2+4\lambda+3)=a^2(\lambda^2-1)$，由 $e=\frac{c}{a}$，则 $\frac{1}{e^2}=\frac{\lambda^2+4\lambda+3}{\lambda^2-1}=1+4\times\frac{1}{\lambda-1}$，由 $\lambda\in[2,3]$，则 $2\leqslant\frac{1}{\lambda-1}\leqslant 4$，则 $3\leqslant\frac{1}{e^2}\leqslant 5$，$e\in(0,1]$，则 $\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant e\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$．

解法二：因为 $|AF_2|=\frac{\lambda+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|AF_1|=\frac{b^2}{a}$，所以 $\frac{\lambda+3}{2}\cdot\frac{b^2}{a}=2a$，所以 $4a^2=(\lambda+3)b^2$，$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2=\frac{4}{\lambda+3}\in\left[\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right]$．则 $\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant e\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$．



47. 【解析】(1)如图，因为 $F_2A=F_2B$，所以 $\angle F_2AB=\angle F_2BA$，因为 $F_2A=2a=F_2D+DA=F_2D+F_1D$，所以 $AD=F_1D$，则 $\angle DAF_1=\angle DF_1A$，所以 $\angle DF_1A=\angle F_2BA$，则 $F_1D/\!/BF_2$，因为 $c=1$，所以 $b^2=a^2-1$，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$，取 $x=1$，得 $y_D=\frac{a^2-1}{a}$，则 $AD=2a-\frac{a^2-1}{a}=\frac{a^2+1}{a}$．

又 $DF_1=\frac{5}{2}$，所以 $\frac{a^2+1}{a}=\frac{5}{2}$，解得 $a=2(a>0)$．

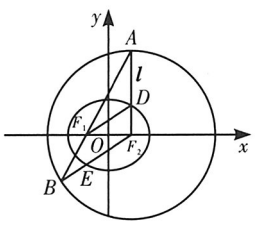
所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)由(1)知，$D\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$F_1(-1,0)$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

所以 $k_{BF_2}=k_{DF_1}=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$，则 $BF_2:y=\dfrac{3}{4}(x-1)$，联立 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}(x-1)\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，得 $21x^2-18x-39=0$. 解得 $x_1=-1$ 或 $x_2=\dfrac{13}{7}$（舍）. 所以 $y_1=-\dfrac{3}{2}$. 即点 E 的坐标为 $\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$.



48. 【解析】(1)由题意设椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，将点 $P\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ 代入椭圆方程得 $b^2=3$，即椭圆 E 的标准方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2)解法一：结合题意，设直线 l 方程为 $x=my+1$，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1=my_1+1$，$x_2=my_2+1$，联立 $\begin{cases}x=my+1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 x，得 $\left(m^2+\dfrac{4}{3}\right)y^2+2my-3=0$. 则 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+\frac{4}{3}}$，$y_1y_2=-\dfrac{3}{m^2+\frac{4}{3}}$，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\dfrac{4(1+m^2)}{m^2+\frac{4}{3}}$，原点 O 到直线 l 距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，则 $\triangle OAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}d\times|AB|=2\sqrt{\dfrac{1+m^2}{\left[(m^2+1)+\frac{1}{3}\right]^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{(m^2+1)+\frac{1}{9(m^2+1)}+\frac{2}{3}}}$，令 $t=m^2+1\geqslant 1$，则 $(m^2+1)+\dfrac{1}{9(m^2+1)}=t+\dfrac{1}{9t}\geqslant\dfrac{10}{9}$（当 $t=1$ 时取等号），则 $S\leqslant\dfrac{3}{2}$，即 $\triangle OAB$ 的面积 S 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$.

解法二：根据焦长公式，$S_{\triangle AOB}=\dfrac{|AB|h_2}{2}=\dfrac{ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\dfrac{6}{\frac{3}{\sin\alpha}+\sin\alpha}\leqslant\dfrac{3}{2}$，当 $\sin\alpha=1$ 时等号成立.

49. 【解析】(1)根据题意可得：$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$，$a^2=b^2+c^2$，解得：$a^2=8$，$b=2$. 故椭圆 C 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

(2)解法一：由(1)知 $F(2,0)$，当直线 l 的斜率不存在时，$S_1=S_2$，于是 $|S_1-S_2|=0$；当直线 l 的斜率存在时，设直线 l：$y=k(x-2)(k\neq 0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-8=0$. 所以 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{8k^2-8}{1+2k^2}$，于是 $|S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times|y_1+y_2|=2\sqrt{2}\,|k(x_1+x_2)-4k|=2\sqrt{2}\left|k\times\dfrac{8k^2}{1+2k^2}-4k\right|=\dfrac{8\sqrt{2}\,|k|}{1+2k^2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\frac{1}{|k|}+2|k|}\leqslant\dfrac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=4$. 当且仅当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，此时 $|S_1-S_2|$ 的最大值为 4. 综上，$|S_1-S_2|$ 的最大值为 4.

解法二：根据焦长公式 $|S_1-S_2|=\dfrac{(|MF_1|-|MF_2|)\cdot 2a\sin\alpha}{2}=2\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{4}{2\sqrt{2}-2\cos\alpha}-\dfrac{4}{2\sqrt{2}+2\cos\alpha}\right)\cdot\sin\alpha=\dfrac{8\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{8\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}\leqslant 4$，当且仅当 $k^2=\tan^2\alpha=\dfrac{1}{2}$ 等号成立.

50. 【解析】(1)依题意有 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\\ \dfrac{1}{2}(a-c)b=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\end{cases}$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

解得$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=1\\c=1.\end{cases}$，故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，设$\triangle F_2MN$ 的内切圆半径为 r，$\triangle F_2MN$ 的周长为 $|MF_1|+|MF_2|+|NF_1|+|NF_2|=4a=4\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle F_2MN}=\frac{1}{2}\times 4a\cdot r=2\sqrt{2}r$.

解法一：根据题意知，直线 l 的斜率不为零，可设直线 l 的方程为 $x=my-1$，由$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\x=my+1\end{cases}$，得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，$\triangle=(2m)^2+4(m^2+2)>0$，$m\in R$，$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，所以 $S_{\triangle F_2MN}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ $=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$，令 $t=\sqrt{m^2+1}$，则 $t\geqslant 1$，所以 $S_{\triangle F_2MN}=\frac{2\sqrt{2}t}{t^2+1}=\frac{2\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}}$. 令 $f(t)=t+\frac{1}{t}$，则当 $t\geqslant 1$ 时，$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}>0$，$f(t)$ 单调递增，所以 $f(t)\geqslant f(1)=2$，$S_{\triangle F_2MN}\leqslant\sqrt{2}$，即当 $t=1$，$m=0$ 时，$S_{\triangle F_2MN}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，此时 $2\sqrt{2}r_{\max}=\sqrt{2}$，$r_{\max}=\frac{1}{2}$. 所以 $\triangle F_2MN$ 内切圆半径的最大值为 $\frac{1}{2}$.

解法二：根据等面积法 $\frac{4a\cdot r}{2}=2\sqrt{2}r=\frac{|MN|h}{2}=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha}\Rightarrow r=\frac{1}{\frac{1}{\sin\alpha}+\sin\alpha}\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $\sin\alpha=1$ 时等号成立.

51. 【解析】(1)由题意可得 $c=2$，即 $a^2-b^2=4$，又 $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，解得 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，则椭圆方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$；

(2)解法一：设直线 $AP: x=my-2$，$BP: x=ny+2$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$\overrightarrow{PF_1}=2\overrightarrow{F_1A}$，可得 $y_0=-2y_1$，$\overrightarrow{PF_2}=\lambda_2\overrightarrow{F_2B}$，可得 $y_0=-\lambda_2y_2$，$(\lambda_2>1)$，联立 $x=my-2$ 和 $x^2+3y^2=6$，可得 $(3+m2)y2-4my-2=0$，$y_0+y_1=\frac{4m}{3+m^2}$，$y_0y_1=-\frac{2}{3+m^2}$，同理可得 $y_0+y_2=-\frac{4n}{3+n^2}$，$y_0y_2=-\frac{2}{3+n^2}$，①

由 $y_0=-2y_1$，可得 $-y_1=\frac{4m}{3+m^2}$，$-2y_1^2=-\frac{2}{3+m^2}$，消去 y_1，可得 $m^2=\frac{1}{5}$，由 $y_0>0$，可得 $m=\frac{\sqrt{5}}{5}$，可得 $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$，由 $y_0=-\lambda_2y_2$，代入①可得 $(1-\lambda_2)y_2=-\frac{4n}{3+n^2}$，$-\lambda_2y_2^2=-\frac{2}{3+n^2}$，可得 $\frac{(1-\lambda_2)^2}{\lambda_2}=\frac{8n^2}{3+n^2}$，又 $n=\frac{1}{k_{PF_2}}=\frac{-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=-\frac{7}{\sqrt{5}}$，即有 $8\lambda_2^2-65\lambda_2+8=0$，解得 $\lambda_2=8$ 或 $\frac{1}{8}$(舍去)，所以 $\lambda_2=8$.

解法二：根据焦比定理，$|PF_1|=\frac{\lambda_1+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|PF_2|=\frac{\lambda_2+1}{2}\cdot\frac{b^2}{a}$，$|PF_1|+|PF_2|=\frac{\lambda_1+\lambda_2+2}{2}\cdot\frac{b^2}{a}=2a$，故 $\lambda_1+\lambda_2=10$，所以 $\lambda_2=8$.

同步训练 5

52. A 【解析】解法一：不妨取直线的斜率为 1，因为右焦点 $F(2, 0)$，所以直线 AB 的方程为 $y=x-2$. 联立方程组$\begin{cases}y=x-2\\\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\end{cases}$，得 $14x^2-36x-9=0$，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{18}{7}$，$x_1x_2=-\frac{9}{14}$，$y_1+y_2=x_1+x_2-4=-\frac{10}{7}$，所以 AB 中点坐标为 $\left(\frac{9}{7}, -\frac{5}{7}\right)$，则 AB 的中垂线方程为 $y+\frac{5}{7}=-\left(x-\frac{9}{7}\right)$，令 $y=0$，得 $x=\frac{4}{7}$，所以点 N 的坐标 $\left(\frac{4}{7}, 0\right)$.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

因为 $|NF|=\sqrt{\left(\frac{4}{7}-2\right)^2}=\frac{10}{7}$，$|AB|=\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{18}{7}\right)^2+4\times\frac{9}{14}}=\frac{30}{7}$，因为 $|NF|:|AB|=\frac{1}{3}$，故选 A.

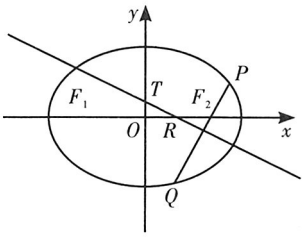
解法二：根据焦点弦中垂线定理 $|NF|:|AB|=\frac{e}{2}=\frac{1}{3}$，故选 A.

53. 【解析】(1)因为椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，当 P 为 C 的短轴顶点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积有最大值 $\sqrt{3}$，所以 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ a^2=b^2+c^2\\ \frac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\\ c=1\end{cases}$，故椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)解法一：设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$，当 $k\neq 0$ 时，$y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得：$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，线段 PQ 的中点为 $N(x_0,y_0)$，$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{3+4k^2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=k(x_0-1)=\frac{-3k}{3+4k^2}$，即 $N\left(\frac{4k^2}{3+4k^2},\frac{-3k}{3+4k^2}\right)$.

因为 $TN\perp PQ$，则 $k_{TN}\cdot k_{PQ}=-1$，所以 $\frac{\frac{-3k}{3+4k^2}-\frac{1}{8}}{\frac{4k^2}{3+4k^2}}\cdot k=-1$，化简得 $4k^2-8k+3=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$.

解法二：(省去了前面的证明步骤)如图，$|RF_2|=\frac{e}{2}|PQ|=\frac{1}{4}|PQ|=\frac{3}{3+\sin^2\alpha}$，$|OR|=1-\frac{1}{4}|PQ|=\frac{\sin^2\alpha}{3+\sin^2\alpha}$，易知：$\tan\alpha=\frac{OR}{OT}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+3}}{\frac{1}{8}}=\frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+3}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha=4\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$，即 $4\tan^2\alpha-8\tan\alpha+3=0$；解得：$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$，即 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$.



54. 【解析】(1)由椭圆的焦点在 x 轴上，设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，椭圆 C 的一个顶点为 $(0,1)$，即 $b=1$，由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，解得：$a^2=5$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$；

(2)解法一：由得 $F(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)(k\neq 0)$，代入椭圆方程，消去 y 可得 $(5k^2+1)x^2-20k^2x+20k^2-5=0$，则 $x_1+x_2=\frac{20k^2}{5k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{20k^2-5}{5k^2+1}$，因为点 C 与点 A 关于 x 轴对称，所以 $C(x_1,-y_1)$ 假设存在 $N(t,0)$，使得 C、B、N 三点共线，则 $\overrightarrow{BN}=(t-x_2,-y_2)$，$\overrightarrow{CN}=(t-x_1,y_1)$，因为 C，B，N 三点共线，所以 $\overrightarrow{BN}//\overrightarrow{CN}$，所以 $(t-x_2)y_1+(t-x_1)y_2=0$，即 $(y_1+y_2)t=x_2y_1+x_1y_2$，所以 $t=\frac{k(x_1-2)x_2+k(x_2-2)x_1}{k(x_2-2)+k(x_2-2)}=\frac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)}{x_1+x_2-4}=\frac{2\cdot\frac{20k^2-2}{1+5k^2}-2\cdot\frac{20k^2}{1+5k^2}}{\frac{20k^2}{1+5k^2}-4}=\frac{5}{2}$. 所以存在定点 $\left(\frac{5}{2},0\right)$，使得 C，B，N 三点共线.

解法二：参考本书专题 6，这里不详述.

解法三：平移构造齐次式，参考本书的专题 6 和秒 2 的专题 9，设 $N(x_0,0)$，将坐标系向右平移 m 个单位，可得椭圆方程为 $\frac{(x+x_0)^2}{5}+y^2=1$，化简得 $\frac{x^2}{5}+y^2+\frac{2}{5}x_0x+\frac{x_0^2}{5}-1=0$①，由于 $A'B'$ 过定点 $(2-x_0,0)$，故可设 $A'B'$ 方程为

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$mx+ny=1$②，易知 $m=\dfrac{1}{2-x_0}$③，②代入①，构造齐次式方程，得：$\dfrac{x^2}{5}+y^2+\dfrac{2}{5}x_0x(mx+ny)+\left(\dfrac{x_0^2}{5}-1\right)(mx+ny)^2=0$，同除以 x^2 得：$\left[1+n^2\left(\dfrac{x_0^2}{5}-1\right)\right]k^2+\left[\dfrac{2}{5}nx_0+2mn\left(\dfrac{x_0^2}{5}-1\right)\right]+\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}mx_0+m^2\left(\dfrac{x_0^2}{5}-1\right)=0$，根据对称性可得 $k_1+k_2=0$，即 $\dfrac{2}{5}nx_0+2mn\left(\dfrac{x_0^2}{5}-1\right)=0$，代入③得：$2x_0-5=0$，所以存在定点 $\left(\dfrac{5}{2},0\right)$，使得 C，B，N 三点共线.

(3)解法一：由 $0\leqslant m\leqslant 2$，$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(x_1+x_2-2m,y_1+y_2)$，$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，因为 $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，所以 $(x_1+x_2-2m)(x_2-x_1)+(y_2-y_1)(y_1+y_2)=0$，所以 $\dfrac{20k^2}{5k^2+1}-2m-\dfrac{4k^2}{5k^2+1}=0$，所以 $k^2=\dfrac{m}{8-5m}$，所以 $k^2=\dfrac{m}{8-5m}>0$，解得 $0<m<\dfrac{8}{5}$，所以当 $0<m<\dfrac{8}{5}$ 时，故 m 的范围为 $\left(0,\dfrac{8}{5}\right)$.

解法二：根据几何性质可知 M 位于 AB 的中垂线上，$m=c-\dfrac{e}{2}|AB|=2-\dfrac{2}{1+4\sin^2\alpha}\in\left(0,\dfrac{8}{5}\right)$.

达标训练

1. A 【解析】设直线 l_1 的倾斜角为 θ，则 l_2 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}+\theta$，根据焦点弦长公式可得 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$，$|DE|=\dfrac{2p}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)}=\dfrac{2p}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\cos^2\theta}$，所以 $|AB|+|DE|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{4}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{16}{\sin^2 2\theta}$，因为 $0<\sin^2 2\theta\leqslant 1$，所以当 $\theta=45°$ 时，$|AB|+|DE|$ 的最小，最小为 16，故选 A.

2. D 【解析】由 $y^2=2px$，得 $2p=3$，$p=\dfrac{3}{2}$，$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=\dfrac{3}{\frac{1}{4}}=12$，所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\dfrac{p}{2}\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{4}$，故选 D.

3. B 【解析】设 Q 到 l 的距离为 d，则 $|QF|=d$，因为 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，所以 $|PQ|=3d$，故 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，根据几何意义可知 $|QF|$ 为焦点弦的短弦，故 $|QF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=\dfrac{4}{1+\frac{1}{3}}=3$，故选 B.

4. C 【解析】设直线 AB 的倾斜角为 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 因为 $|AF|=3$，所以 $\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=3\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\triangle AOB$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times|OF|\times|AB|\times\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}\times\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故选 C.

5. B 【解析】抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$，设 AB 与抛物线对称轴的夹角为 α，由于 $|BF|>|AF|$，故 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，$|BF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，又 $AB\perp AD$，故 $|AF|=p\cos\alpha=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\sin^2\alpha$，$|BF|=|AF|+4\Rightarrow 2p\cos\alpha=4\sin^2\alpha\Rightarrow 2p=4$，则 $p=2$，故选 B.

6. C 【解析】由抛物线的定义，得，$|AF|=\dfrac{p}{4}+\dfrac{p}{2}=3$，解得 $p=4$，所以 $|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}=3\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=9$，故选 C.

7. C 【解析】根据双曲线的定义，可得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，因为 $\triangle ABF_2$ 是等边三角形，即 $|AF_2|=|AB|$，所以 $|BF_1|=2a$，又因为 $|BF_2|-|BF_1|=2a$，所以 $|BF_2|=|BF_1|+2a=4a$，由于双曲线与直线交于两支，故 $|AF_1|=3|BF_1|=6a$，根据焦长焦比定理可知 $6a=\dfrac{3-1}{2}\dfrac{b^2}{a}\Rightarrow b^2=6a^2$，所

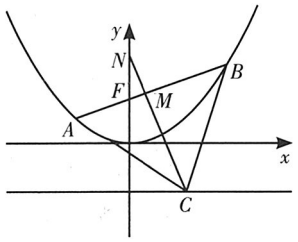
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

以双曲线方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6a^2}=1$，又$A(1,\sqrt{3})$，在双曲线上，所以$\frac{1}{a^2}-\frac{3}{6a^2}=1$，解得$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以$\triangle BF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}\times 2a\times 4a\times\sin 120^\circ=2\sqrt{3}a^2=\sqrt{3}$，故选 C.

8. A 【解析】因为$y^2=4x$，焦点$F(1,0)$，$|AB|=|AF|-\frac{p}{2}=\frac{2}{1-\cos\alpha}-1$，$|CD|=|DF|-\frac{p}{2}=\frac{2}{1+\cos\alpha}-1$，则$|AB|\cdot|CD|=\frac{4}{\sin^2\alpha}-\frac{4}{\sin^2\alpha}+1=1$. 综上所述，$|AB|\cdot|CD|=1$，故选 A.

9. B 【解析】如图，作AB的中垂线交y轴于N，AB中点为M，令AB与y轴夹角为α，$|AB|=\frac{4}{\sin^2\alpha}$，$|NF|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{2}{\sin^2\alpha}$，$|NC|=\frac{|NF|+p}{\sin\alpha}=\frac{\frac{2}{\sin^2\alpha}+2}{\sin\alpha}$，$|MN|=|NF|\sin\alpha=\frac{2}{\sin\alpha}$，因为$|MN|+|MC|=|NC|$，$|MC|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|=\frac{2\sqrt{3}}{\sin^2\alpha}$，所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$|AB|=12$，故选 B.



10. 【解析】过抛物线$y^2=2x$的焦点F作直线l交抛物线于A，B两点，所以$|AF|=\frac{p}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{1+\cos\alpha}$，所以$|AF|=\frac{5}{6}$. 故答案为$\frac{5}{6}$.

11. 【解析】抛物线$|AB|=\frac{25}{12}=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{5}$ $C:y^2=4x$的焦点为$F(1,0)$，设直线AB的倾斜角为θ，由抛物线的弦长公式$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\sin^2\theta}=8$，解得：$\sin^2\theta=\frac{1}{2}$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，则直线的斜率$k=1$，所以直线$l$的方程$y=x-1$；

(2)由(1)可得AB的中点坐标为$D(3,2)$，则直线AB的垂直平分线方程为$y-2=-(x-3)$，即$y=-x+5$，设所求圆的圆心坐标为(x_0,y_0)，

则$\begin{cases}y_0=-x_0+5\\(x_0+1)^2=\frac{(y_0-x_0+1)^2}{2}+16\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_0=3\\y_0=2\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=11\\y_0=-6\end{cases}$，

因此，所求圆的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=16$或$(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

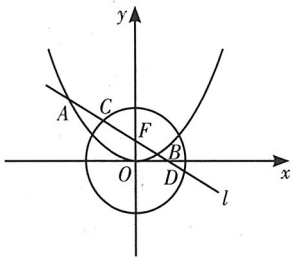
12. 【解析】(1)因为M是C上一点且MF_2与x轴垂直，所以M的横坐标为c，当$x=c$时，$y=\frac{b^2}{a}$，即$M\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，若直线$MN$的斜率为$\frac{3}{4}$，即$\tan\angle MF_1F_2=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{3}{4}$，即$b^2=\frac{3}{2}ac=a^2-c^2$，即$c^2+\frac{3}{2}ac-a^2=0$，则$e^2+\frac{3}{2}e-1=0$，即$2e^2+3e-2=0$，解得$e=\frac{1}{2}$或$e=-2$(舍去)，即$e=\frac{1}{2}$；

(2)由题意，原点O是F_1F_2的中点，则直线MF_1与y轴的交点$D(0,2)$是线段MF_1的中点，设$M(c,y)$，$(y>0)$，则$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，即$y^2=\frac{b^4}{a^2}$，解得$y=\frac{b^2}{a}$，因为$OD$是$\triangle MF_1F_2$的中位线，所以$\frac{b^2}{a}=4$，由$|MN|=5|F_1N|$，则$|MF_1|=4|F_1N|$，则以$F_1$为极点的椭圆的极坐标方程$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$，即$|MF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$|NF_1|=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$，所以$\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{4b^2}{a+c\cos\theta}\Rightarrow e\cos\theta=\frac{3}{5}$，所以$|MF_1|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{4}{1-e\cos\theta}=10$，所以$|MF_1|+|MF_2|=2a\Rightarrow a=7$，$b=2\sqrt{7}$.

13. 【解析】(1)由C_1方程可知$F(0,1)$，因为F也是椭圆C_2的一个焦点，所以$a^2-b^2=1$，又因

获取更多资料加qq群698274639

为 C_1 与 C_2 的公共弦的长为 $2\sqrt{6}$，C_1 与 C_2 的图像都关于 y 轴对称，所以易得 C_1 与 C_2 的公共点的坐标为 $\left(\pm\sqrt{6}, \frac{3}{2}\right)$，所以 $\frac{9}{4a^2}+\frac{6}{b^2}=1$，又因为 $a^2-b^2=1$，所以 $a^2=9$，$b^2=8$，所以 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$；



(2)设 AB 与 y 轴的夹角为 α，根据焦长公式(请用极坐标或者余弦定理证明) $|AF|=\frac{2}{1-\cos\alpha}$，$|BF|=\frac{2}{1+\cos\alpha}$，$|CF|=\frac{8}{3+\cos\alpha}$，$|DF|=\frac{8}{3-\cos\alpha}$，$|AC|=|BD|\Rightarrow|AF|-|CF|=|DF|-|BF|$，即 $|AB|=|CD|\Rightarrow\frac{4}{\sin^2\alpha}=\frac{48}{8+\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{8}{11}\Rightarrow k=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$，即直线 l 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{6}}{4}$.

14. 【解析】(1)双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，$a=1$，$c^2=1+b^2$，直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，$\triangle F_1AB$ 是等边三角形，可得：$A(c, b^2)$，可得：$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2b^2=2c$，$3b^4=4(a^2+b^2)$，即 $3b^4-4b^2-4=0$，$b>0$，解得 $b^2=2$. 所求双曲线方程为：$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$；

(2)$b=\sqrt{3}$，双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，可得 $F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$. $(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot(\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1A})=0$ 可得：$|F_1A|=|F_1B|$，参考第 7 题，可知 $|AB|=|AF_2|-|BF_2|=|AF_1|+2a-|BF_1|+2a=4a=4$，根据与两支双曲线相交的焦长公式，可得 $\frac{2ab^2}{c^2\cos^2\alpha-a^2}=4a\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{5}{8}\Rightarrow k^2=\frac{3}{5}$，$k=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

15. 【解析】(1)由题意可知：$F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$. 故 $\odot C$ 的半径为 2，圆心为原点 O 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点. 设圆心的坐标为 (m, n).

则 $\begin{cases}\frac{n}{m}=1\\ \frac{m}{2}+\frac{n}{2}-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=2\\ n=2\end{cases}$.

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$；

(2)由题意，以 $(2, 0)$ 为极点，化为极坐标方程，则 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，即 $b=4\sin\theta$，E 的极坐标方程为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$，故 $a=\frac{ep}{1-e\cos\theta}+\frac{ep}{1+e\cos\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{1+4\sin^2\theta}$，$ab=\frac{8\sqrt{5}\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}=\frac{8\sqrt{5}}{\frac{1}{\sin\theta}+4\sin\theta}$. 根据基本不等式可知 $\frac{1}{\sin\theta}+4\sin\theta\geqslant 4$，当且仅当 $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，直线 l 的方程为 $x\pm\sqrt{3}y-2=0$.

16. 【解析】(1)设 $F_1(-c, 0)$，$F_2(c, 0)(c>0)$. 由题得 $|PF_2|=|F_1F_2|$，即 $\sqrt{(a-c)^2+b^2}=2c$，整理得 $2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$，得 $\frac{c}{a}=-1$(舍)，或 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $e=\frac{1}{2}$；

(2)由(1)知 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，可得 $\sin\alpha=\frac{b}{2c}$，$|AB|=\frac{2ab^2}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\frac{16}{5}c$，于是 $|MN|=\frac{5}{8}|AB|=2c$. 圆心 $(-1, \sqrt{3})$ 到直线 PF_2 的距离 $d=\frac{|-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}c|}{2}$，因为 $d^2+\left(\frac{|MN|}{2}\right)^2=4^2$，所以 $\frac{3}{4}(2+c)^2+c^2=16$，整理得 $c=-\frac{26}{7}$(舍)或 $c=2$. 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

17. 【解析】(1)易知 $2a=4$，即 $a=2$，$2a=c$，即 $c=1$，又 $b^2=a^2-c^2$，所以 $b^2=3$，故椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)设 $\triangle OAD$ 的面积为 S_1，$\triangle OAC$ 的面积为 S_2，$|S_1-S_2|=|OA|\cdot||CF|-|DF||\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}=||CF|-|DF||\sin\alpha$. 根据焦长公式 $|CF|-|DF|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}-\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}=\frac{2b^2c\cos\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}$，$|S_1-S_2|=\frac{6\sin\alpha\cos\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=\frac{6|\tan\alpha|}{3+4\tan^2\alpha}=\frac{6}{\frac{3}{|\tan\alpha|}+4|\tan\alpha|}$（当且仅当 $3|\tan\alpha|=\frac{4}{|\tan\alpha|}$，即 $\tan\alpha=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立）. 所以 $|S_1-S_2|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. 【解析】(1)易知椭圆过点 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3},1\right)$，所以 $\frac{8}{3a^2}+\frac{1}{b^2}=1$①，又 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$②，$a^2=b^2+c^2$③，

由①②③得 $a^2=4$，$b^2=3$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)设直线 AF_1 交椭圆另一点为 C，BF_2 交椭圆另一点为 D，根据椭圆的对称性可知，$S_{ABDC}=2S_{ABF_2F_1}=2S_{ACF_2}\Rightarrow S_{ABF_2F_1}=S_{ACF_2}=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\frac{12\sin\alpha}{3+\sin^2\alpha}=\frac{12}{\sin\alpha+\frac{3}{\sin\alpha}}\leqslant\frac{12}{2\sqrt{3}}$，由于 $\sin\alpha+\frac{3}{\sin\alpha}\geqslant2\sqrt{3}$ 时，等号条件取不到，故只能当 $\sin\alpha=1$ 时取最大，最大值为 3. 所以四边形 ABF_2F_1 面积的最大值为 3.

19. 【解析】(1)直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$，即 $bx-ay-ab=0$，由题意得 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$①

因为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$②，$a^2=b^2+c^2$③，解得 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

(2) $S_{\triangle PQF_1}=\frac{2ab^2c\sin\alpha}{b^2+c^2\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}\sin\alpha}{1+2\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{1}{\sin\alpha}+2\sin\alpha}\leqslant\sqrt{3}$，当且仅当 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立；又所以 $S_{\triangle PQF_1}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|QF_1|+|PQ|)r=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{3}r=2\sqrt{3}r$，所以 $r_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

注意：关于 $4a$ 体的面积问题，分母都会转化为基本不等式模型，关于取等条件是 $c>b$ 时能取等，$c<b$ 时不能取等.

20. 【解析】(1)由 $e=\frac{1}{2}$ 得 $a=2c$，$|AF_1|=2$，$|AF_2|=2a-2$，$|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cos A=|F_1F_2|^2$，解得 $c=1$，$a=2$，$b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)存在这样的点 M 符合题意. 设直线 PQ 倾斜角为 θ，将 F_2 设为极坐标的极点，根据椭圆的极坐标方程 $|PF_2|=\rho=\frac{ep}{1+e\cos\theta}=\frac{3}{2+\cos\theta}$，则 $|QF_2|=\frac{3}{2-\cos\theta}$，则 $|PF_2|=\frac{|PQ|}{2}-|PF_2|=\frac{|QF_2|-|PF_2|}{2}=\frac{3\cos\theta}{3+\sin^2\theta}$，$|MF_2|=\frac{|NF_2|}{\cos\theta}=\frac{3}{3+\sin^2\theta}$；故 $m=|OF_2|-|MF_2|=1-\frac{3}{3+\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{3+\sin^2\theta}=\frac{1}{\frac{3}{\sin^2\theta}+1}\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，

所以存在实数 m 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

专题2　焦点三角形问题

达标训练

1. D　**2.** C　**3.** A　**4.** A　**5.** D　**6.** B　**7.** A

8. A　**9.** B　**10.** C　**11.** C　**12.** A　**13.** D

14. D　**15.** D　**16.** A

17. A　【解析】提示：利用柯西不等式，首先根据公式 $\frac{\sin^2\frac{\pi}{6}}{e_{椭}^2}+\frac{\cos^2\frac{\pi}{6}}{e_{双}^2}=1$，然后 $\left(\frac{\frac{1}{4}}{e_{椭}^2}+\frac{\frac{3}{4}}{e_{双}^2}\right)\left(4+\frac{4}{3}\right)\geqslant\left(\frac{1}{e_{椭}}+\frac{1}{e_{双}}\right)^2=\frac{16}{3}$. 故选 A.

18. D　**19.** D　**20.** B

21. D　【解析】提示：$\angle F_1PQ=90°$，$|F_1Q|=$

获取更多资料加qq群698274639

$2|F_1P| \Rightarrow \angle F_1QP = 30°$，$\dfrac{S_{PF_1F_2}}{S_{QF_1F_2}} = \dfrac{b^2\tan45°}{b^2\tan15°} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. 故选 D.

22. C

23. C 【解析】提示：$S > b^2\tan30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = c|y_P| \Rightarrow |y_P| > \dfrac{1}{3} \Rightarrow -\dfrac{4\sqrt{2}}{3} < x_P < \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

24. 3 **25.** $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ **26.** $\dfrac{9}{4}$ **27.** $\dfrac{1}{4}$

28. ①④

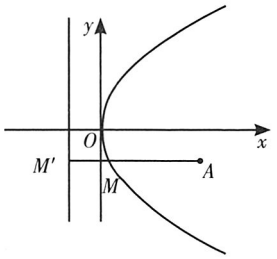
29. 2

30. 【解析】提示：由双曲线 $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$，得 $a^2 = 1$，$b^2 = 3$，所以 $c = \sqrt{a^2+b^2} = 2$. 当 $PF_2 \perp x$ 轴时，把 $x = 2$ 代入 $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$，得 $y = \pm 3$，即 $|PF_2| = 3$，此时 $|PF_1| = |PF_2| + 2 = 5$，则 $|PF_1| + |PF_2| = 8$；当 $PF_1 \perp PF_2$，$S = b^2 = \dfrac{|PF_1||PF_2|}{2} = 3$，$|PF_1| + |PF_2| = \sqrt{(|PF_1| - |PF_2|)^2 + 4|PF_1||PF_2|} = 2\sqrt{7}$.

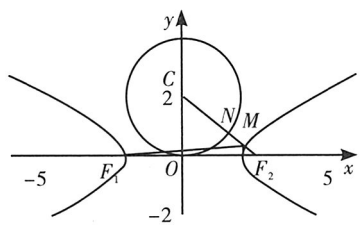
专题3　最值之声东击西

达标训练

1. D 【解析】由抛物线方程可知，$2p = 8$，所以抛物线的焦点 $F(2, 0)$，准线方程为 $x = -2$，设 M 在抛物线准线方程上射影为 M'，因为点 M 到准线的距离与 M 到焦点距离相等，所以 $|MA| + |MF| = |MA| + |M'M|$，当 $x = 4$，代入抛物线方程求得 $y = \pm 4\sqrt{2}$，所以 AD 点抛物线的内部，根据内连准线，当 M'，M，A 三点共线时，$|MA| + |M'M|$ 的值最小，此时 $|MA| + |M'M| = |AM| = 6$. 此时 M 的纵坐标为 -2，$x = \dfrac{1}{2}$，即 M 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$. 故选 D.

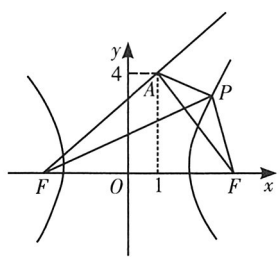


2. B 【解析】由题意可得 $2a = 4$，即 $a = 2$，渐近线方程为 $y = \pm\dfrac{1}{2}x$，即有 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$，即 $b = 1$，可得双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$，焦点为 $F_1(-\sqrt{5}, 0)$，$F_2(\sqrt{5}, 0)$，由双曲线的定义可得 $|MF_1| = 2a + |MF_2| = 4 + |MF_2|$，由圆 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 可得圆心 $C(0, 2)$，半径 $r = 2$，$|MN| + |MF_1| = 4 + |MN| + |MF_2|$，连接 CF_2，交双曲线于 M，圆于 N，可得 $|MN| + |MF_2|$ 取得最小值，且为 $|CF_2| = \sqrt{4+5} = 3$，则 $|MN| + |MF_1|$ 的最小值为 $4 + 3 - 2 = 5$. 故选 B.



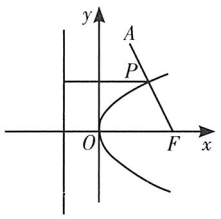
3. D 【解析】双曲线 $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$，因为 $a = 6$，$b = 8$，$c = 10$，所以 $F_1(-10, 0)$，$F_2(10, 0)$，因为 $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 12$，所以 $|MP| \leqslant |PF_1| + |MF_1|$，$|PN| \geqslant |PF_2| + |NF_2|$，所以 $-|PN| \leqslant -|PF_2| + |NF_2|$，所以，$|PM| - |PN| \leqslant |PF_1| + |MF_1| - |PF_2| + |NF_2| = 12 + 1 + 2 = 15$. 故选 D.

4. D 【解析】设双曲线的右焦点为 F'，双曲线 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的 $a = 2$，$c = \sqrt{4+b^2}$，可得 $F(-c, 0)$，$F'(c, 0)$，由双曲线的定义可得 $|PF| - |PF'| = 2a = 4$，可得 $|PF| = 4 + |PF'|$，则 $|PF| + |PA| = 4 + |PF'| + |PA| \geqslant 4 + |AF'|$，当 A，P，F' 共线时，取得等号. $4 + |AF'| = 4 + \sqrt{(1-c)^2 + (4-0)^2} = 9$，解得 $c = 4$，则双曲线的离心率为 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{2} = 2$，故选 D.

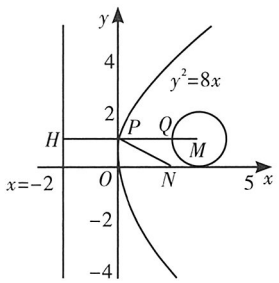


 获取更多资料加qq群698274639

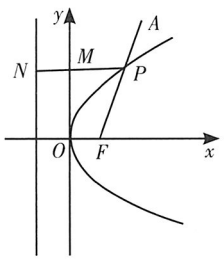
5. B 【解析】由题意可得 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，因为点 $A\left(\frac{7}{2}, 4\right)$在抛物线外，所以根据抛物线的定义可得 $|PA| + |PF|$的最小值为 $|AF| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = 5$. 故选 B.



6. B 【解析】由抛物线方程 $y^2 = 8x$，可得抛物线的焦点 $F(2, 0)$，准线为 $x = -2$，又 $N(2, 0)$，即 N 与 F 重合. 由抛物线的定义可得 $|PN| = d$（d 为 P 到准线的距离），圆 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心设为 $M(3, 1)$，半径为 1，如图，过圆 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的圆心 M 作抛物线的准线的垂线 MH，交圆于 Q，交抛物线于 P，此时 $|PQ| + |PN|$取得最小值，且为 $|MH| - 1 = 5 - 1 = 4$. 故选 B.

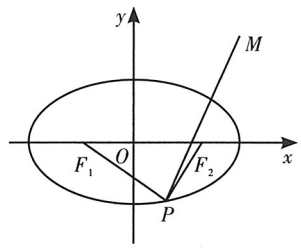


7. B 【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$，准线 $l: x = -1$. 如图所示，过点 P 作 $PN \perp l$ 交 y 轴于点 M，垂足为 N，则 $|PF| = |PN|$，所以 $d = |PF| - 1$，所以 $|PA| + d \geqslant |AF| - 1 = \sqrt{(4-1)^2 + 5^2} - 1 = \sqrt{34} - 1$. 故选 B.



8. C 【解析】两圆圆心 $F_1(-4, 0)$，$F_2(4, 0)$恰好是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点，所以 $|PF_1| + |PF_2| = 10$，两圆的半径相等，且 $r = 1$，所以 $(|PM| + |PN|)_{\min} = |PF_1| + |PF_2| - 2r = 10 - 2 = 8$. $(|PM| + |PN|)_{\max} = |PF_1| + |PF_2| + 2r = 10 + 2 = 12$，故选 C.

9. 【解析】椭圆中的 $c = \sqrt{49-33} = \sqrt{16} = 4$，即焦点坐标为 $F_1(-4, 0)$，$F_2(4, 0)$，点 M 在椭圆的外部，则 $|PM| + |PF_1| = |PM| + 2a - |PF_2| = 14 + |PM| - |PF_2| \leqslant 14 + |MF_2| = 14 + \sqrt{(8-4)^2 + 5^2} = 14 + \sqrt{41}$，当且仅当 M，F_2，P 三点共线时取等号.

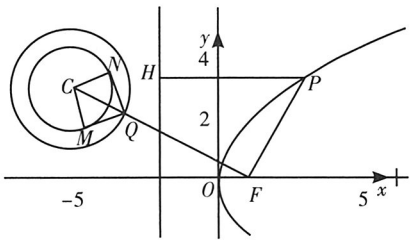


10. 【解析】求 $\triangle MAF$ 周长的最小值，即求 $|MA| + |MF|$的最小值，设点 M 在准线上的射影为 D，根据抛物线的定义，可知 $|MF| = |MD|$，因此，$|MA| + |MF|$的最小值，即 $|MA| + |MD|$的最小值，根据平面几何知识，可得当 D，M，A 三点共线时 $|MA| + |MD|$最小，因此最小值为 $x_A - (-1) = 2 + 1 = 3$，因为 $|AF| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$，所以 $\triangle MAF$ 周长的最小值为 $3 + \sqrt{2}$.

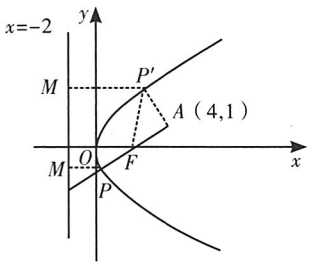
11. 【解析】圆 C 的圆心 $C(-5, 3)$，半径为 $\sqrt{2}$，由 l 上的一点 Q 向圆 C：$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 2$ 引两条切线，分别切圆 C 于 M，N 两点，可得四边形 $MCQN$ 为正方形，边长为 2，由抛物线 $y^2 = 4x$ 可得 $F(1, 0)$，准线方程为 $x = -1$，则 $|PH| + |PQ| = |PF| + |PQ| + 1$，连接 FC 交抛物线于 P，可得 $|PQ| + |PF| = |QF|$，此时 $|PQ| + |PF|$取得最小值，可得 $|PF| + |PQ| = |CF| - 2 = \sqrt{(-5-1)^2 + 3^2} - 2 = 3\sqrt{5} - 2$，则 $|PH| + |PQ|$的最小值为 $3\sqrt{5} - 1$.

 获取更多资料加qq群698274639

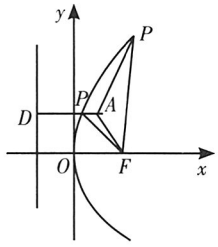
获取更多资料加qq群698274639



12. 【解析】根据题意画出图形，如图所示；由图形知，$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}-x=|PA|-x=|PA|-(|PM|-2)=|PA|-(|PF|-2)=|PA|-|PF|+2\leqslant|AF|+2=\sqrt{5}+2$；即$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}-x$的最大值是$\sqrt{5}+2$.



13. 【解析】抛物线$y^2=8x$的焦点为$F(2,0)$，点$A(1,2)$，求$\triangle PAF$周长的最小值，即求$|PA|+|PF|$的最小值，设点P在准线上的射影为D，根据抛物线的定义，可知$|PF|=|PD|$，因此，$|PA|+|PF|$的最小值，即$|PA|+|PD|$的最小值，根据平面几何知识，可得当D，P，A三点共线时$|PA|+|PD|$最小，P的纵坐标为：2，可得$4=8x$，解得$x=\frac{1}{2}$. 则$\triangle PAF$的周长取到最小值时点P的坐标为$\left(\frac{1}{2},2\right)$.



14. 【解析】由题意得$a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$c=4$，$F(-4,0)$，右焦点$H(4,0)$. 由双曲线的定义可得$|PF|+|PA|=2a+|PH|+|PA|\geqslant 2a+|AH|=4\sqrt{3}+\sqrt{(1-4)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{3}+5$.

15. 【解析】根据双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{6}=1$，得：$a=3$，$b=\sqrt{6}$，由双曲线的定义可得：$|AF_2|-|AF_1|=2a=6\cdots①$，$|BF_2|-|BF_1|=2a=6\cdots②$，①+②可得：$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=12$，因为过双曲线的左焦点$F_1$的直线交双曲线的左支于$A$，$B$两点，所以$|AF_1|+|BF_1|=|AB|$，当$|AB|$是双曲线的通径时$|AB|$最小. 所以$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=|AF_2|+|BF_2|-|AB|=12$. $|BF_2|+|AF_2|=|AB|+12\geqslant\frac{2b^2}{a}+12=\frac{2\times6}{3}+12=16$.

专题4　椭圆双曲线设点设线基础

达标训练

1. D 【解析】设椭圆上的点为(x,y)，则因为圆$x^2+(y-6)^2=2$的圆心为$(0,6)$，半径为$\sqrt{2}$，所以椭圆上的点(x,y)到圆心$(0,6)$的距离为$\sqrt{x^2+(y-6)^2}=\sqrt{10(1-y^2)+(y-6)^2}=\sqrt{-9\left(y+\frac{2}{3}\right)^2+50}\leqslant5\sqrt{2}$，所以$P$，$Q$两点间的最大距离是$5\sqrt{2}+\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. 故选D.

2. B 【解析】由$\begin{cases}y=mx+b\\x^2+4y^2=1\end{cases}$，得$(1+4m^2)x^2+8mbx+4b^2-1=0$，因为直线$y=mx+b$与椭圆$x^2+4y^2=1$恒有公共点，所以$\triangle=64m^2b^2-4(1+4m^2)(4b^2-1)\geqslant0$，即$4b^2\leqslant4m^2+1$对任意$m$恒成立，所以$4b^2\leqslant1$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant b\leqslant\frac{1}{2}$，故选B.

3. 【解析】联立$\begin{cases}y=kx-2\\x^2-y^2=1\end{cases}$，化为$(1-k^2)x^2+4kx-5=0$. ①当$1-k^2=0$时，可得$k=\pm1$，此时直线$l$的方程为$y=\pm x+1$，分别与等轴双曲线的渐近线$y=\pm x$平行，此时直线$l$与双曲线有且只有一个交点，满足题意；②当$1-k^2\neq0$时，由直线与双曲线有且只有一个公共点，可得$\triangle=16k^2+20(1-k^2)=0$，解得$k=\pm\sqrt{5}$. 此时满足条件. 综上可得：$k=\pm1$，$\pm\sqrt{5}$.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

4. 【解析】把 $y=x-1$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 化简可得 $3x^2-4x-2=0$，$x_1+x_2=\frac{4}{3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{-2}{3}$，由弦长公式可得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{-8}{3}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

5. 【解析】(1)由题意可设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$，焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，所以 $c=\sqrt{3}$. $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$，又 $a^2-b^2=c^2=3$，解得 $a=2$，$b=1$. 所以椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，圆 O 的方程为：$x^2+y^2=3$.

(1)解法一：①可知直线 l 与圆 O 相切，也与椭圆 C，且切点在第一象限，因此 k 一定小于 0，所以可设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，$(k<0,\ m>0)$. 由圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离等于圆半径 $\sqrt{3}$，可得 $\frac{m^2}{1+k^2}=3$，即 $m^2=3+3k^2$ 由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，可得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，$\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=0$，可得 $m^2=4k^2+1$，所以 $3k^2+3=4k^2+1$，结合 $k<0$，$m>0$，解得 $k=-\sqrt{2}$，$m=3$. 将 $k=-\sqrt{2}$，$m=3$ 代入 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\y=kx+m\end{cases}$ 可得 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$，解得 $x=\sqrt{2}$，$y=1$，故点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$.

②设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}k<0,\ m>0\\m^2=3+3k^2\Rightarrow k<-\sqrt{2}.\\\Delta>0\end{cases}$

联立直线与椭圆方程得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}$，$O$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}$，$\triangle OAB$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{k^2-2}}{4k^2+1}\times\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，解得 $k=-\sqrt{5}$，(正值舍去)，$m=3\sqrt{2}$. 所以 $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$ 为所求.

解法二：①(抓住条件 $b=1$ 大大简化计算量)将直线设为 $x=ky+m$，可得 $\frac{m^2}{1+k^2}=3$，由 $\begin{cases}x=ky+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}$，可得 $(k^2+4)y^2+2kmy+m^2-4=0$，$\triangle=(2km)^2-4(k^2+4)(m^2-4)=0$，可得 $m^2=k^2+4$，所以 $3k^2+3=k^2+4$，结合 $k<0$，$m>0$，解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$m=\frac{3}{\sqrt{2}}$. 代入 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\y=kx+m\end{cases}$，解得 $x=\sqrt{2}$，$y=1$，故点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$.

②设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}k<0,\ m>0\\m^2=3+3k^2\Rightarrow 0>k>-\frac{\sqrt{2}}{2}.\\\Delta>0\end{cases}$

联立直线与椭圆方程得 $(k^2+4)y^2+2kmy+m^2-4=0$，$|y_2-y_1|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{k^2+4-m^2}}{k^2+4}$，$O$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|y_2-y_1|=\frac{4\sqrt{k^2+4-m^2}}{k^2+4}\cdot\sqrt{1+k^2}=\frac{4\sqrt{1-2k^2}}{k^2+4}\cdot\sqrt{1+k^2}$，$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{k^2+4-m^2}}{k^2+4}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{1-2k^2}}{k^2+4}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，解得 $k=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，(正值舍去)，$m=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. 所以 $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$ 为所求.

6. 【解析】(1)设 $P(x,y)$，由椭圆定义可知，点 P 的轨迹 C 是以 $(0,-\sqrt{3})$，$(0,\sqrt{3})$ 为焦点，长半轴为 2 的椭圆. 它的短半轴 $b=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，故曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$；

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

(2) 设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，其坐标满足 $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y=kx+1. \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(k^2+4)x^2+2kx-3=0$，故 $x_1+x_2=-\dfrac{2k}{k^2+4}$，$x_1x_2=-\dfrac{3}{k^2+4}$. $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 而 $y_1y_2=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1$，于是 $x_1x_2+y_1y_2=-\dfrac{3}{k^2+4}-\dfrac{3k^2}{k^2+4}-\dfrac{2k^2}{k^2+4}+1=\dfrac{-4k^2+1}{k^2+4}$. 所以 $k=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，$x_1x_2+y_1y_2=0$，故 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. 当 $k=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，$x_1+x_2=\mp\dfrac{4}{17}$，$x_1x_2=-\dfrac{12}{17}$. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}$，而 $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=\dfrac{4^2}{17^2}+4\times\dfrac{4\times3}{17}=\dfrac{4^3\times13}{17^2}$，所以 $|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{4\sqrt{65}}{17}$.

7. 【解析】(1) 设点 A 的坐标为 (x_1, b)，点 B 的坐标为 (x_2, b)，由 $\dfrac{x^2}{4}+b^2=1$，解得 $x_{1,2}=\pm2\sqrt{1-b^2}$，所以 $S=\dfrac{1}{2}b\cdot|x_1-x_2|=2b\cdot\sqrt{1-b^2}\leqslant b^2+1-b^2=1$. 当且仅当 $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，S 取到最大值 1；

(2) 【解析】由 $\begin{cases} y=kx+b \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $\left(k^2+\dfrac{1}{4}\right)x^2+2kbx+b^2-1=0$，① $\Delta=4k^2-b^2+1$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4k^2-b^2+1}}{\frac{1}{4}+k^2}=$

2. ②设 O 到 AB 的距离为 d，则 $d=\dfrac{2S}{|AB|}=1$，又因为 $d=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $b^2=k^2+1$，代入②式并整理，得 $k^4-k^2+\dfrac{1}{4}=0$，解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$，$b^2=\dfrac{3}{2}$，代入①式检验，$\Delta>0$，故直线 AB 的方程是 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，或 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

8. 【解析】(1) 设椭圆的半焦距为 c，依题意 $\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \\ a=\sqrt{3} \end{cases}$ 所以 $b=1$，所以所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$；

(2) 解法一：设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$. 当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|=\sqrt{3}$. 当 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$. 由已知 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $m^2=\dfrac{3}{4}(k^2+1)$. 把 $y=kx+m$ 代入椭圆方程，整理得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$. 所以 $|AB|^2=(1+k^2)(x_2-x_1)^2=(1+k^2)\left[\dfrac{36k^2m^2}{(3k^2+1)^2}-\dfrac{12(m^2-1)}{3k^2+1}\right]=\dfrac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}=\dfrac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}=3+\dfrac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}=3+\dfrac{12}{9k^2+\frac{1}{k^2}+6}(k\neq0)\leqslant3+\dfrac{12}{2\times3+6}=4$. 当且仅当 $9k^2=\dfrac{1}{k^2}$，即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立. 当 $k=0$ 时，$|AB|=\sqrt{3}$，综上所述 $|AB|_{\max}=2$. 所以当 $|AB|$ 最大时，$\triangle AOB$ 面积取最大值 $S=\dfrac{1}{2}\times|AB|_{\max}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

解法二：设直线 AB 的方程为 $x=ky+m$. 由已知 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得 $m^2=\dfrac{3}{4}(k^2+1)$. 把 $x=ky+m$ 代入椭圆方程，整理得 $(k^2+3)y^2+2kmy+m^2-3=0$，所以 $y_1+y_2=\dfrac{-2km}{k^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-3}{k^2+3}$. 所以 $|AB|^2=(1+k^2)(y_2-y_1)^2=\dfrac{12(k^2+1)(k^2+3-m^2)}{(k^2+3)^2}=\dfrac{3(k^2+1)(k^2+9)}{(k^2+3)^2}=\dfrac{3(t-2)(t+6)}{t^2}=1+\dfrac{4}{t}-\dfrac{12}{t^2}\leqslant4$. 当且仅当 $t=6=k^2+3$，即 $k=\pm\sqrt{3}$ 时等号成立. 综上所述 $|AB|_{\max}=2$. 所以当 $|AB|$ 最大

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

时，$\triangle AOB$ 面积取最大值 $S=\frac{1}{2}\times|AB|_{\max}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. 【解析】(1)设 $B(x_0, y_0)$ 则 $C(-x_0, -y_0)$，由 $\frac{x_0^2}{a^2}+y_0^2=1$ 得，$y_0^2=1-\frac{x_0^2}{a^2}=\frac{a^2-x_0^2}{a^2}$，由 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-\frac{1}{2}$，即 $\frac{y_0}{x_0-a}\cdot\frac{-y_0}{-x_0-a}=-\frac{1}{2}$ 得，$y_0^2=\frac{a^2-x_0^2}{2}$，所以 $\frac{a^2-x_0^2}{a^2}=\frac{a^2-x_0^2}{2}$，所以 $a^2=2$，所以 $\frac{x_2}{2}+y_2=1$；

(2)证明：设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=kx+t\end{cases}$，得：$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，$x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-2}{1+2k^2}$，$y_1y_2=(kx_1+t)(kx_2+t)=k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2=\frac{k^2(2t^2-2)}{1+2k^2}+\frac{-4k^2t^2}{1+2k^2}+t^2=\frac{t^2-2k^2}{1+2k^2}$，又 l 与圆 C 相切，所以 $\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$，即 $\frac{2}{3}=\frac{t^2}{1+k^2}$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{2t^2-2+t^2-2k^2}{1+2k^2}=\frac{3t^2-2(1+k^2)}{1+2k^2}=\frac{2(1+k^2)-2(1+k^2)}{1+2k^2}=0$. 所以，$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}$，即 $\angle MON=90°$，所以，以线段 MN 为直径的圆经过原点.

10. 【解析】(1)由已知得 $a=2$，$c=1$，所以 $b=\sqrt{3}$，则 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)假设存在点 $M(x_0, 0)$，使得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 为定值，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$. 设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1\cdot y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，$\overrightarrow{MA}=(x_1-x_0, y_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-x_0, y_2)$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-x_0)\cdot(x_2-x_0)+y_1\cdot y_2=(m^2+1)y_1\cdot y_2+(1-x_0)m(y_1+y_2)+(1-x_0)^2=(m^2+1)\cdot(-\frac{9}{3m^2+4})+(1-x_0)m(-\frac{6m}{3m^2+4})+(1-x_0)^2=\frac{(6x_0-15)m^2-9}{3m^2+4}+(1-x_0)^2$. 要使上式为定值，即与 m 无关，应有 $\frac{6x_0-15}{3}=-\frac{9}{4}$，解得 $x_0=\frac{11}{8}$，此时 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\frac{135}{64}$，所以，存在点 $M\left(\frac{11}{8}, 0\right)$ 使得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-\frac{135}{64}$ 为定值.

11. 【解析】(1)曲线 Γ 上的任意一点到两定点 $F_1(-1, 0)$、$F_2(1, 0)$ 的距离之和为 $2\sqrt{2}$，所以 $c=1$，$2a=2\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$，所以曲线 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)证明：设直线 l：$y=kx+b$，$(k\neq0, b\neq0)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$M(x_M, y_M)$，把直线 $y=kx+b$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 可得 $(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-2=0$，故 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-2kb}{2k^2+1}$，$y_M=kx_M+b=\frac{b}{1+2k^2}$，于是在 OM 的斜率为：$K_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=-\frac{1}{2k}$，即 $K_{OM}\cdot k=-\frac{1}{2}$. 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

(2)解法一：(参考答案给出)当直线 OA，OB 分别与坐标轴重合时，$\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当直线 OA，OB 的斜率均存在且不为零时，设 OA：$y=kx$，OB：$y=-\frac{1}{k}x$，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，将 $y=kx$ 代入椭圆 C，得到 $x^2+2k^2x^2=2$，所以 $x_1^2=\frac{2}{1+2k^2}$，$y_1^2=\frac{2k^2}{1+2k^2}$，同理，$x_2^2=\frac{2k^2}{1+2k^2}$，$y_2^2=\frac{2}{1+2k^2}$，$\triangle AOB$ 的面积 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\sqrt{\frac{(k^2+1)^2}{(1+2k^2)(k^2+2)}}$，令 $t=k^2+1\in[1, +\infty)$，则 $S_{\triangle AOB}=\sqrt{\frac{t^2}{(2t-1)(t+1)}}=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}}$，当 $t=2$ 时，有最小值，最小值为 $\frac{2}{3}$，当 $t=1$ 时，有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，综上所述，$\triangle AOB$ 的面积的取值范围是 $\left[\frac{2}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

解法二：先算出原点到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，令 AB 方程为 $x=ky+m$，即 $m^2=\frac{2}{3}(1+k^2)$，$|AB|=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+2-m^2}}{k^2+2}=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+4}}{3\quad k^2+2}$，令 $t=k^2+2\ (t\geqslant 2)$，$|AB|=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{\frac{(t-1)(t+2)}{t^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}}$，当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{4}$，即 $t=4$ 时，$|AB|_{\max}=\sqrt{3}$，此时面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$；当 $t\to\infty$ 时，即 k 不存在时，$|AB|_{\min}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，此时面积为 $\frac{2}{3}$.

12. 【解析】(1)由已知得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{|b(-a)-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，所以 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，①当直线 AB 的斜率不存在时，则由椭圆的对称性知 $x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，因为以 AB 为直线的圆经过坐标原点，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$，所以 $x_1^2-y_1^2=0$，又点 A 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{4}-y_1^2=1$，解得 $|x_1|=|y_1|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

此时点 O 到直线 AB 的距离 $d_1=|x_1|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

(2)当直线 AB 的斜率存在时，设 AB 的方程为 $y=kx+m$ 联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$，因为以 AB 为直径的圆过坐标原点 O，所以 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，所以 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，所以 $(1+k^2)\cdot\frac{4m^2-4}{1+4k^2}-\frac{8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$，整理，得 $5m^2=4(k^2+1)$，所以点 O 到直线 AB 的距离 $d_1=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，综上所述，点 O 到直线 AB 的距离为定值 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$；

(3)$\frac{4}{5}\leqslant S\leqslant 1$，$S$ 的最小值为 $\frac{4}{5}$. 具体过程参考第 11 题的解法二.

13. 【解析】(1)设 M 点坐标为 $(x,y)(x\neq\pm2)$.

因为定点 $A(-2,0)$、$B(2,0)$，直线 MA 与直线 MB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{y}{x+2}\times\frac{y}{x-2}=-\frac{1}{4}$，所以 $\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$；

(2)证明：当动直线 l 的斜率不存在时，

$P\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$Q\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

若 $S\left(-\frac{17}{8},0\right)$，$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}=\frac{33}{64}$.

当动直线 l 的斜率存在时，设动直线 l 的方程为 $y=k(x+1)(k\neq0)$，联立方程组，消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-4}{1+4k^2}$. 所以 $\overrightarrow{SP}=\left(x_1+\frac{17}{8},y_1\right)$，$\overrightarrow{SQ}=\left(x_2+\frac{17}{8},y_2\right)$，所以 $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SQ}=\left(x_1+\frac{17}{8},y_1\right)\cdot\left(x_2+\frac{17}{8},y_2\right)=\frac{-4(1+4k^2)}{1+4k^2}+\frac{17^2}{8^2}=\frac{33}{64}$.

专题5　抛物线设点设线基础

达标训练

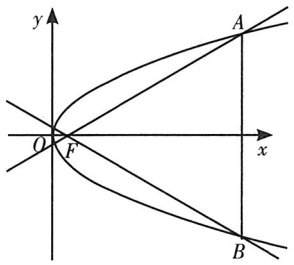
1. C 【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由 $y_1^2=6x_1$，$y_2^2=6x_2$，相减可得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

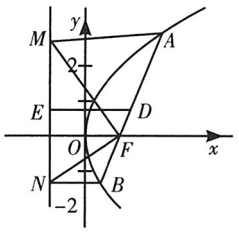
$6(x_1-x_2)$，因为 $y_1+y_2=4$，所以 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$，故选 C.

2. B 【解析】抛物线的焦点坐标为 $F(1,0)$，若 $\triangle ABF$ 是等边三角形，由对称性知，A，B 必关于 x 轴对称，假设 A 在第一象限，则只需要直线 AF 的倾斜角为 30°，即可，而焦点 F 在抛物线内，故直线 AF 与抛物线有两个交点，则对应的三角形 ABF 有两个，故满足条件的等边 $\triangle ABF$ 的个数为 2 个，故选 B.

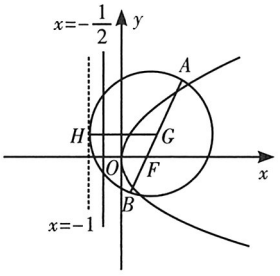


3. A 【解析】由题意知，抛物线 $y^2=x$ 的焦点坐标点 $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$，直线 AB 的方程为 $x=ky+\dfrac{1}{4}$，联立得 $y^2-ky-\dfrac{1}{4}=0$. 所以 $y_1\cdot y_2=-\dfrac{1}{4}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{1}{16}$. 所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{16}$，故选 A.

4. D 【解析】直线 $l:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 经过点 $F(1,0)$，可得 $p=2$，即抛物线 C：$y^2=4x$，准线方程为 $x=-1$，联立直线 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ 和抛物线 C：$y^2=4x$，根据焦半径公式 $|AB|=x_A+x_B+p=x_A+x_B+2$，联立可得 $3x^2-10x+3=0$，$x_A+x_B=\dfrac{10}{3}$，$|AB|=\dfrac{16}{3}$，根据直角三角形射影定理的逆定理，要证明 $MF\perp NF$，只需 $|y_M|\cdot|y_N|=|2OF|^2=p^2$，由于 AB 是过焦点的弦，故 $y_My_N=-p^2$，则 $MF\perp NF$ 即 $\angle MFN=90°$，线段 AB 的中点为 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，则线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\dfrac{5}{3}$，综上可得 A，B，C 正确，D 错误. 故选 D.



5. A 【解析】如图所示，抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$. 设 AB 中点为 G，过 G 作抛物线准线的垂线，垂足为 H，则 $GH=\dfrac{1}{2}AB$，即以 AB 为直径的圆与抛物线准线相切，所以以线段 AB 为直径的圆与直线 l 的位置关系为相交. 故选 A.



6. C 【解析】抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点 M 的纵坐标为 1，$y_1+y_2=2$，则 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，两式相减可得：$y_1^2-y_2^2=2p(x_1-x_2)$，$k_{AB}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}=\dfrac{2p}{2}=p$，所以 $p=2$. 故选 C.

7. B 【解析】由题意可得，弦所在直线斜率存在，设弦所在直线方程为 $x-1=k(y-1)$，代入抛物线的方程可得 $y^2-4ky-4k-4=0$，由 $y_1+y_2=4k=2$ 可得，$k=\dfrac{1}{2}$，故弦所在直线方程为 $2x-y-1=0$，故选 B.

8. C 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为直线 OD 斜率为 $\dfrac{1}{2}$，$OD\perp AB$，所以直线 AB 斜率为 -2，故直线 AB 方程为 $2x+y-5=0\cdots①$将① 代入抛物线方程得 $y^2+py-5p=0$，则 $y_1y_2=-5p$，因为 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，则 $(y_1y_2)^2=4p^2x_1x_2$，故 $x_1x_2=\dfrac{25}{4}$，因为 $OA\perp OB$. 所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$，因为 $p>0$，所以 $p=\dfrac{5}{4}$. 故选 C.

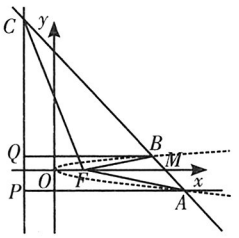
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

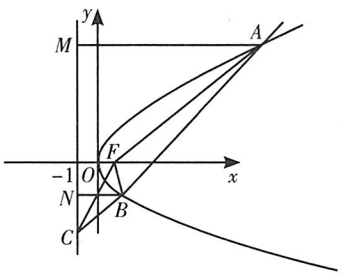
9. B 【解析】设直线 AB 方程为 $x=ky+m$. 由 $\begin{cases}x=ky+m\\y^2=2px\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2pky-2pm=0$. 设 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $y_1y_2=-2pm$, $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}=m^2$, 所以由 $OA\perp OB$ 得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=m^2-2pm=0$. 所以直线 l 过定点 $(2p,\ 0)$. 因为 $y_1y_2=-4p^2$, 所以 $|y_1-y_2|=\left|y_1+\frac{4p^2}{y_1}\right|\geqslant 4p$, 所以 $S=\frac{1}{2}\times\left(2p-\frac{p}{2}\right)\times|y_1-y_2|$, 所以当 $y_1=2p$ 时, S 的最小值为 $3p^2$. $\triangle ABF$ 面积的最小值为 12, 可得 $p=2$. 故选 B.

10. D 【解析】设 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, 则 $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times|y_1-y_2|=\frac{25\sqrt{2}}{8}$, 所以 $|y_1-y_2|=5\sqrt{2}$, 设直线 AB 的方程为 $x=ky+\frac{5}{4}$, 联立方程组 $\begin{cases}y^2=5x\\x=ky+\frac{5}{4}\end{cases}$, 消去 x 得: $y^2-5ky-\frac{25}{4}=0$, 所以 $y_1+y_2=5k$, $y_1y_2=-\frac{25}{4}$, 所以 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{25k^2+25}=5\sqrt{k^2+1}$, 所以 $\sqrt{k^2+1}=\sqrt{2}$. 所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}=10$. 故选 D.

11. B 【解析】抛物线准线为 $x=-\frac{1}{2}$, 过 A, B 作准线的垂线 AP, BQ, 则 $BQ=BF=2$, 不妨设 B 在第一象限, 则 $B\left(\frac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$, 设直线 AB 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$, 联立方程组 $\begin{cases}x=my+\sqrt{3}\\y^2=2x\end{cases}$, 消去 x 可得 $y^2-2my-2\sqrt{3}=0$, 所以 $y_A\cdot y_B=-2\sqrt{3}$, 故而 $y_A=-2$, $x_A=\frac{y_A^2}{2}=2$, 所以 $AP=x_A+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, 所以 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{BC}{AC}=\frac{BQ}{AP}=\frac{4}{5}$. 故选 B.



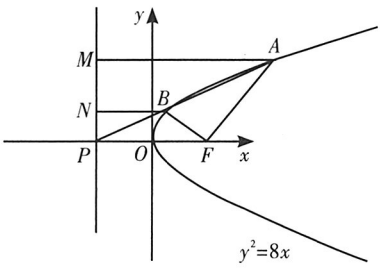
12. D 【解析】抛物线的准线方程为 $l:x=-1$, 分别过 A, B 作准线 l 的垂线 AM, BN, 则 $|BN|=|BF|=5$, 所以 B 点横坐标为 4, 不妨设 $B(4,\ -4)$, 则直线 AB 的方程为: $y=4x-20$, 联立方程组 $\begin{cases}y=4x-20\\y^2=4x\end{cases}$, 得 $4x^2-41x+100=0$, 设 A 横坐标为 x_0, 则 $x_0+4=\frac{41}{4}$, 故而 $x_0=\frac{25}{4}$. 所以 $|AM|=x_0+1=\frac{29}{4}$, 所以 $\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{|BN|}{|AM|}=\frac{20}{29}$. 故选 D.



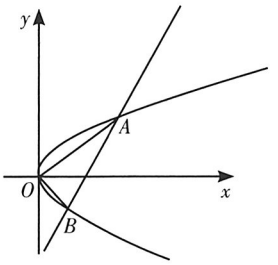
13. B 【解析】分别过 A, B 项抛物线的准线作垂线, 垂足分别为 M, N, 则 $AF=AM$, $BF=BN$, 因为 $\sin\angle ABF=2\sin\angle BAF$, 所以 $AF=2BF$, 所以 $AM=2BN$, 所以 $\frac{PB}{PA}=\frac{BN}{AM}=\frac{1}{2}$, 即 B 为 AP 的中点. 联立方程组 $\begin{cases}x=ky-2\\y^2=8x\end{cases}$, 消去 x 可得: $y^2-8ky+16=0$, 设 $A\left(\frac{y_1^2}{8},\ y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{8},\ y_2\right)$, 则 $y_1y_2=16$, 又 B 是 PA 的中点, 所以 $y_1=2y_2$, 所以 $y_2=2\sqrt{2}$, 即 $B(1,\ 2\sqrt{2})$, 又 $P(-2,\ 0)$, 所以直线 AB 的斜率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639



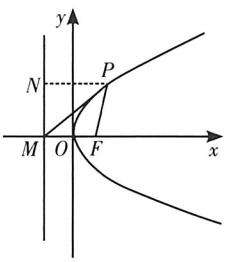
14. D 【解析】联立$\begin{cases}2x-y-3=0\\y^2=4x\end{cases}$，可得$y^2-2y-6=0$，$y_1+y_2=2$，则$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}=\frac{y_1+y_2}{4}=\frac{1}{2}$. 故选 D.



15. B 【解析】当直线 AB 的斜率不存在时，此时 AB 的方程为 $x=1$，所以 $y=\pm1$，所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\times1=\frac{1}{2}\times2\times1=1$，当直线的斜率存在时，设直线方程为 $x=ky+1$，代入抛物线方程可化为 $y^2-ky-1=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=k$，$y_1y_2=-1$，所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}\times1\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left|y_1+\frac{1}{y_1}\right|\geqslant1$，综上所述 $\triangle ABO$ 面积的最小值是 1，故选 B.

16. D 【解析】设 $P(a,b)$ $Q(x,y)$，则$\overrightarrow{AP}=(a+1,b-1)$，$\overrightarrow{PQ}=(x-a,y-b)$，由垂直得 $(a+1)(x-a)+(b-1)(y-b)=0$. 又 P，Q 在抛物线上即 $a^2=b$，$x^2=y$，故 $(a+1)(x-a)+(a^2-1)(x^2-a^2)=0$. 整理得 $(a+1)(x-a)[1+(a-1)(x+a)]=0$，而 P 和 Q 和 A 三点不重合即 $a\neq-1$，又 $x\neq a$. 所以式子可化为 $1+(a-1)(x+a)=0$，整理得 $a^2+(x-1)a+1-x=0$. 由题意可知，此关于 a 的方程有实数解. 即判别式 $\Delta\geqslant0$ 得 $(x-1)^2-4(1-x)\geqslant0$，解得 $x\leqslant-3$ 或 $x\geqslant1$，点 Q 的横坐标取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$. 故选 D.

17. B 【解析】如图所示，$F(2,0)$，过点 P 作 $PN\perp l$，垂足为 N. 因为 $|PM|=\sqrt{2}|PF|$，$|PF|=|PN|$，所以 $|PM|=\sqrt{2}|PN|$，设 $P\left(\frac{t^2}{8},t\right)$，则 $\pm t=\frac{t^2}{8}+2$，解得 $t=\pm4$. 所以 $\triangle PMF$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times|t|\cdot|MF|=\frac{1}{2}\times4\times4=8$. 故选 B.



18. C 【解析】抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 易知 $y_1y_2=16$，延长 BF 与抛物线交于另一点 $C(x_3,y_3)$，易知 $y_2y_3=-16$，故 A、C 关于 y 轴对称，故直线 FA 与直线 FB 的斜率之和为 0，故选 C.

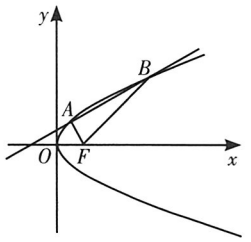
19. 【解析】(1) 设点 $P(x,y)$，则$\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2}=\left|y+\frac{1}{8}\right|$，平方整理得：$x^2=\frac{1}{2}y$，所以曲线 C 的方程，$x^2=\frac{1}{2}y$；

(2)证明：由题意可知直线 AB 的斜率一定存在，否则不与曲线 C 有两个交点. 设 AB 方程为 $y=kx+m$，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程$\begin{cases}y=kx+m\\y=2x^2\end{cases}$，得 $2x^2-kx-m=0$，则得 $x_1+x_2=\frac{k}{2}$，$x_1x_2=-\frac{m}{2}$，由 $x^2=\frac{1}{2}y$ 得：$y_1=2x_1^2$，$y_2=2x_2^2$. $\Delta=k^2+8m>0$. $y_1y_2=2x_1^2\cdot2x_2^2=4(x_1x_2)^2=4\times(x_1x_2)^2=m^2$. $\Delta=k^2+8m$，直线 AB 过 $\triangle AOB$ 的外心，其中 O 为坐标原点，所以 $OA\perp OB$. 所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$y_1y_2=0$，所以 $-\frac{m}{2}+m^2=0$. $m\neq0$，解得 $m=\frac{1}{2}$. 所以直线 AB 过定点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



20. 【解析】(1)依题意设直线 l_1 的方程为 $y=x+\frac{p}{2}$，由已知得：圆 C_2：$(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心 $C_2(-1,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，因为直线 l_1 与圆 C_2 相切，所以圆心到直线 l_1：$y=x+\frac{p}{2}$ 的距离 $d=\frac{\left|-1+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，即 $\frac{\left|-1+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，解得 $p=6$ 或 $p=-2$(舍去). 所以 $p=6$；

(2)依题意设 $M(m,-3)$，由(1)知抛物线 C_1 方程为 $x^2=12y$，所以 $y=\frac{x^2}{12}$，所以 $y'=\frac{x}{6}$，设 $A(x_1,y^1)$，则以 A 为切点的切线 l_2 的斜率为 $k=\frac{x_1}{6}$，所以切线 l_2 的方程为 $y=\frac{1}{6}x_1(x-x_1)+y^1$. 令 $x=0$，$y=-\frac{1}{6}x_1{}^2+y^1=-\frac{1}{6}\times12y_1+y^1=-y_1$，即 l_2 交 y 轴于 B 点坐标为 $(0,-y^1)$，所以 $\overrightarrow{MA}=(x_1-m,y^1+3)$，$\overrightarrow{MB}=(-m,-y^1+3)$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=(x_1-2m,6)$，所以 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=(x_1-m,3)$. 设 N 点坐标为 (x,y)，则 $y=3$，所以点 N 在定直线 $y=3$ 上.

21. 【解析】(1)设 $D(x,y)$，则 $k_{BD}-k_{AD}=\frac{y-2}{x-2}-\frac{y-2}{x+2}=2$，整理为：$x^2=2y$，所以曲线 C 的方程为 $x^2=2y$，$(x\neq\pm2)$；

(2)假设在 y 轴上存在定点 $G(0,y_0)$，使得 $\angle PCT=\angle QCT$，可知：直线 PQ 的斜率存在. 设 PQ 的方程为：$y=kx+2$，代入抛物线方程可得：$x^2-2kx-4=0$，$\Delta=4k^2+16>0$ 恒成立，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$. 则 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-4$，因为 $\angle PCT=\angle QCT$，所以 $k_{CP}+k_{CQ}=0$. 所以 $\frac{y_1-y_0}{x_1}+\frac{y_2-y_0}{x_2}=0$，所以 $(kx_1+2-y_0)+(kx_2+2-y_0)x_1=0$，化为 $2kx_1x_2+(2-y_0)(x_1+x_2)=0$，所以 $-8k+(2-y_0)\cdot2k=0$，即 $k(2+y_0)=0$，所以 $y_0=-2$，因此在 y 轴上存在定点 $G(0,-2)$，使得 $\angle PCT=\angle QCT$.

22. 【解析】(1)由题意，$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|MN|=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot2p=\frac{p^2}{2}=18$，所以 $p=6$，抛物线 C 的标准方程为 $y^2=12x$；

(2)设直线 MN 的参数方程为 $\begin{cases}x=m+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$，代入抛物线方程得：$t^2\sin^2\alpha=12(t\cos\alpha+m)$，故 $t_1+t_2=\frac{12\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$；$t_1t_2=\frac{-12m}{\sin^2\alpha}$，$\frac{1}{|AM|}+\frac{1}{|AN|}=\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}\right)^2}=\frac{\cos^2\alpha}{m^2}+\frac{\sin^2\alpha}{3m}$为定值时(注意，这里是很多学生会搞错的，搞清楚这里，后面就一马平川了)，必有 $m^2=3m=9$ 时成立. 即 $a=3$ 时，t 与 m 无关，所以所求的“稳定点”为(3，0).

23. 【解析】(1)因为点 M 到抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 焦点 F 的距离为 1，所以点 M 到准线 l：$y=-\frac{p}{2}$ 的距离为 1，即 $\frac{p}{2}+\frac{3}{4}=1$，解得 $p=\frac{1}{2}$，所以抛物线的标准方程为 $x^2=y$；

(2)设点 $M(m,m^2)(m\neq0)$，$M_1(x_1,x_1{}^2)$，$M_2(x_2,x_2{}^2)$，因为 $k_{AM}=\frac{m^2+2}{m}$，所以直线 AM 的方程为：$y=\frac{m^2+2}{m}x-2$；由 $\begin{cases}y=\frac{m^2+2}{m}x-2\\x^2=y\end{cases}$，消去 y，得 $x^2-\frac{m^2+2}{m}x+2=0$；由 $\Delta>0$，得 $m^2\neq2$，即 $m\neq\pm\sqrt{2}$，又因为 $mx_1=2$，所以 $x_1=\frac{2}{m}$；同理可得：$x_2=-\frac{1}{m}$；所以 $k_1=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2=\frac{1}{m}$，$k_2=\frac{m^2}{m}=m$；所以 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{m}\times m=1$，所以 $k_1\cdot k_2$ 为定值 1.

24. 【解析】(1) 根据题意知：$k_{MN}=\frac{-2-2}{5-1}=-1$，由于 $MN\perp AB$，则 $k_{AB}=1$，于是直线 l 的方程为：$y-(-2)=1\cdot(x-5)$，即直线 l 的方程为 $x-y-7=0$；

(2) 证明：由于点 M 在抛物线上，所以得抛物线方程为 $y^2=4x$，设点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，直线 l 的方程为：$x=m(y+2)+5$，联立抛物线的方程，整理得 $y^2-4my-(8m+20)=0$，即：$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8m-20$，又 $\overrightarrow{AM}=(x_1-1, y_1-2)$，$\overrightarrow{BM}=(x_2-1, y_2-2)$，于是：$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{(y_1y_2)^2}{16}-m(y_1+y_2)-4m-10+1+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{(8m+20)^2}{16}-m(4m)-4m-9-(8m+20)-2(4m)+4=0$，所以 $\angle AMB=90°$，即点 M 在以 AB 为直径的圆上.

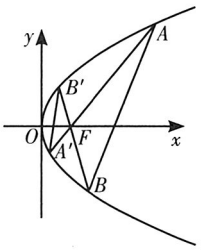
25. 【解析】(1) 由 $\begin{cases}x=p\\y^2=2px\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=p\\y=\pm\sqrt{2}p\end{cases}$，从而 $A(p, \sqrt{2}p)$，$B(p, -\sqrt{2}p)$，从而 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{2}p=\frac{\sqrt{2}}{2}p^2$，$S_{\triangle FAB}=2S_{\triangle AFM}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot\sqrt{2}p=\frac{\sqrt{2}}{2}p^2$，所以 $S_{\triangle AOM}=S_{\triangle FAB}$，所以 $\lambda=1$

(2) 设直线 l：$x=ky+p$，代入 $y^2=2px$ 整理得，$y^2-2pky-2p^2=0$，所以 $y_1y_2=-2p^2\Rightarrow y_2=\frac{-2p^2}{y_1}$，由 $S_{\triangle AOM}=\frac{4}{3}\cdot S_{\triangle FAB}$ 得 $\frac{1}{2}p|y_1|=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(p-\frac{p}{2}\right)\left|y_1+\frac{2p^2}{y_1}\right|\Rightarrow y_1=\pm2p\Rightarrow x_1=2p$，直线 l：$y=\pm2(x-p)$

(3) 命题甲：$S_{\triangle AOM}=2\cdot S_{\triangle FAB}\Rightarrow\frac{1}{2}p|y_1|=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(p-\frac{p}{2}\right)\left|y_1+\frac{2p^2}{y_1}\right|\Rightarrow y_1=y_1+\frac{2p^2}{y_1}$，矛盾；

(4) 命题乙：$S_{\triangle AOM}=2\cdot S_{\triangle FAB}\Rightarrow\frac{1}{2}p|y_1|=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(x_0-\frac{p}{2}\right)\left|y_1+\frac{2p^2}{y_1}\right|$，令 $x_0=mp\left(m>\frac{1}{2}\right)$，故 $y_1^2=\frac{1-2m}{m-1}p^2$，即 $\frac{1-2m}{m-1}>0\Rightarrow\frac{1}{2}<m<1$，即 $\frac{p}{2}<x_0<p$.

26. 【解析】令 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$A'(x_3, y_3)$，$B'(x_4, y_4)$，联立可知 $A'\left(\frac{1}{x_1}, -\frac{4}{y_1}\right)$，$B'\left(\frac{1}{x_2}, -\frac{4}{y_2}\right)$；$k_{A'B'}=2k_{AB}\Rightarrow\frac{\left(-\frac{4}{y_1}\right)-\left(-\frac{4}{y_2}\right)}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}=2\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\Rightarrow y_1y_2=-2x_1x_2\Rightarrow y_1y_2=-8$. 故 $y_1y_2=-8=-4m\Rightarrow m=2$，即 AB 过定点 $(2, 0)$，同理 $A'B'$ 过定点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



专题 6　设点设线进阶之角度问题

达标训练

1. C　【解析】$\tan\angle AMB=-1$，$\tan\angle MAB=\frac{1}{3}$，可得 $\tan\angle MBN=-\frac{\tan\angle AMB+\tan\angle MAB}{1-\tan\angle AMB\tan\angle MAB}=\frac{1}{2}$，$AB$ 是椭圆 C 长轴长的两个顶点，$k_{MA}=\frac{1}{2}$，$k_{MB}=-\frac{1}{3}$，故 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1=-\frac{1}{6}$，故选 C.

2. C　【解析】$A(-a, 0)$，$B(a, 0)$. 设 $M(x_0, y_0)$，$k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{b^2}{a^2}\in\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$，可得：$\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1\in\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$，所以 $e\in\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1\right)$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

故选 C.

3. D 【解析】线段 AB 的中点为(2，1)，由 $\frac{4}{36}+\frac{1}{18}<1$，可得 AB 的中点在椭圆内，即直线 AB 与椭圆相交，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，可得 $\frac{x_1^2}{36}+\frac{y_1^2}{18}=1$，$\frac{x_2^2}{36}+\frac{y_2^2}{18}=1$，相减可得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{36}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{18}=0$，又 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$，则 l 的斜率为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}=-\frac{4}{2\times 2}=-1$，故选 D.

4. B 【解析】由椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 可知其左顶点 $A_1(-2, 0)$，右顶点 $A_2(2, 0)$. 设 $P(x_0, y_0)$ $(x_0\neq\pm 2)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，得 $\frac{y_0^2}{x^20-4}=-\frac{3}{4}$. 因为 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{y_0^2}{x^2-4}=-\frac{3}{4}$，因为 $-2\leqslant K_{PA_2}\leqslant -1$，所以 $-2\leqslant -\frac{3}{4K_{PA_1}}\leqslant -1$，解得 $\frac{3}{8}\leqslant K_{PA_1}\leqslant\frac{3}{4}$. 故选 B.

5. D 【解析】设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，，代入椭圆方程得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，所以 $\frac{x_1+x_2}{a^2}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{b^2}=0$，因为 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$. $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-1-0}{1-3}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2}\times\frac{-2}{b^2}=0$，化为 $a^2=2b^2$，又 $c=3=\sqrt{a^2-b^2}$，解得 $a^2=18$，$b^2=9$. 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$. 故选 D.

6. 【解析】设过点 $A(2, 1)$ 的直线与双曲线交于 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 则 $\begin{cases}3x_1^2-y_1^2=3\\ 3x_2^2-y_2^2=3\end{cases}$ 两式相减得 $3(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$ 又 $x_1+x_2=4$，$y_1+y_2=2$ 代入，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=6$ 即 $k_{PQ}=6$. 故所求直线方程为 $6x-y-11=0$.

7. 【解析】设过点 $B(1, 1)$ 的直线与双曲线交于 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 则 $\begin{cases}3x_1^2-y_1^2=3\\ 3x_2^2-y_2^2=3\end{cases}$ 两式相减得 $3(x_1-x_2)(x_1+x_2)-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$. 又 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$ 代入，$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$ 即 $k_{PQ}=3$，故所求直线方程为 $y=3x-2$，将 $y=3x-2$ 代入 $3x^2-y^2=3$ 得，发现 $6x^2-12x+7=0$，$\Delta<0$，故以定点 $B(1, 1)$ 为中点的弦不存在.

8. 【解析】(1) 对于 $x+\sqrt{2}y-2=0$，当 $x=0$ 时，$y=\sqrt{2}$，即 $b=\sqrt{2}$，当 $y=0$，$x=2$，即 $a=2$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

(2)证明：设直线 $AB: y=kx+2$，$(k\neq 0)$，设 A，B 两点的坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则 $B'(-x_2, y_2)$，联立直线 AB 与椭圆得 $\begin{cases}y=kx+2\\ x^2+2y^2=4\end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+8kx+4=0$. 所以 $x_1+x_2=-\frac{8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{4}{1+2k^2}$，所以 $k_{AB'}=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}$，所以直线 AB': $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}(x-x_1)$，所以令 $x=0$，得 $y=\frac{x_1y_2+x_2y_2}{x_1+x_2}=\frac{x_1(kx_2+2)+x_2(kx_1+2)}{x_1+x_2}=\frac{2kx_1x_2}{x_1+x_2}+2=2k\cdot\frac{4}{1+2k^2}+2=-1+2=1$，所以直线 AB' 过定点 $Q(0, 1)$.

9. 【解析】(1) 设椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$，且 $c=2$，$2a=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=2\sqrt{10}$，即有 $a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{6}$，则椭圆的方程为 $\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$；

(2)由于 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 在第一象限，故 $\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$ $\Rightarrow y=\sqrt{10-\frac{5}{3}x^2}$ 求导得 $y'=\frac{5}{3}x\left(10-\frac{5}{3}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$k_2=-1$. 将坐标系按照$\overrightarrow{AO}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$平移得，$\frac{\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}{10}+\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{6}=1\Rightarrow\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=0$，平移后$E\to E'$，$F\to F'$，设$E'F'$方程为$mx+ny=1$，即$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}+x+y=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}+(x+y)(mx+ny)=0$(构造齐次式)，同除以$x^2$得，$\left(\frac{1}{5}+n\right)\frac{y^2}{x^2}+(m+n)\frac{y}{x}+\frac{1}{3}+m=0$，因为点$E'$、$F'$的坐标满足这个方程，所以$k_{OE'}$，$k_{OF'}$是这个关于$\frac{y}{x}$的方程的两个根. 所以$k_{OE'}+k_{OF'}=k_{AE}+k_{AF}=-\frac{m+n}{\frac{1}{5}+n}=0\Rightarrow m+n=0$，故$k_1=-\frac{m}{n}=1$，则$k_1+k_2=0$.

10. 【解析】(1)由题设知，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=1$，结合$a^2=b^2+c^2$，解得$a=\sqrt{2}$，所以$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)证明：将坐标系按照$\overrightarrow{AO}=(0,1)$平移得：$\frac{x^2}{2}+(y-1)^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{2}+y^2-2y=0$，平移后$P\to P'$，$Q\to Q'$，设$P'Q'$方程为$mx+ny=1$，由于$PQ$过点(1，1)，故$P'$，$Q'$过点(1，2)即$m+2n=1$即$\frac{x^2}{2}+y^2-2y=\frac{x^2}{2}+y^2-2y(mx+ny)=0$(构造齐次式)，同除以$x^2$得，$(1-2n)\frac{y^2}{x^2}-2m\frac{y}{x}+\frac{1}{2}=0$，因为点$P'$，$Q'$的坐标满足这个方程，所以$k_{OP'}$，$k_{OQ'}$是这个关于$\frac{y}{x}$的方程的两个根，所以$k_{OP'}+k_{OQ'}=k_{PA}+k_{QA}=-\frac{2m}{1-2n}=\frac{2(1-2n)}{1-2n}=2$，即有直线$AP$与$AQ$斜率之和为2.

11. 【解析】(1)如图1，设$M(x,y)$，$A(x_0,y_0)$，因为$|DM|=m|DA|$，所以$x=x_0$，$|y|=m|y_0|$，所以$x_0=x$，$|y_0|=\frac{1}{m}|y|$①. 因为点A在圆上运动，$x_0^2+y_0^2$②，①代入②即得所求曲线C的方程为$x^2+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0,m\neq1)$.

因为$m\in(0,1)\cup(1,\infty)$，所以$0<m<1$时，曲线C是焦点在x轴上的椭圆，两焦点坐标分别为$(-\sqrt{1-m^2},0)$，$(\sqrt{1-m^2},0)$$m>1$时，曲线$C$是焦点在$y$轴上的椭圆，两焦点坐标分别为$(0,-\sqrt{m^2-1})$，$(0,\sqrt{m^2-1})$；

(2)如图2、3，$\forall x_1\in(0,1)$，设$P(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，则$Q(-x_1,-y_1)$，$N(0,y_1)$，因为P，H两点在椭圆C上，

所以$\begin{cases}m^2x_1^2+y_1^2=m^2①\\m^2x_2^2+y_2^2②\end{cases}$

①−②可得$\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}=-m^2$③，

因为Q，N，H三点共线，所以$k_{QN}=k_{QH}$，

所以$\frac{2y_1+y_2}{x_1+x_2}$，所以$k_{PQ}\cdot k_{PH}=\frac{y_1(y_1-y_2)}{x_1(x_1-x_2)}=-\frac{m^2}{2}$，因为$PQ\perp PH$，$k_{PQ}\cdot k_{PH}=-1$，所以$-\frac{m^2}{2}=-1$，所以$m=\sqrt{2}$故存在$m=\sqrt{2}$，使得在其对应的椭圆$x^2+\frac{y^2}{2}=1$上，对任意$k>0$，都有$PQ\perp PH$.

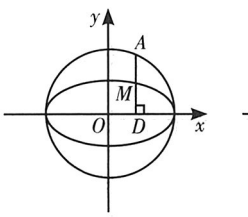


图1

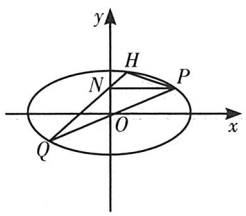


图2(0<m<1)

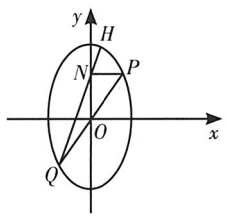


图3($m>1$)

12. 【解析】(1)由题意，可设直线AB的方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB中点

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$M(x_0, y_0)$ 可得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1① \\ \frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1②\end{cases}$，①－②得：$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{2}+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，同除以$(x_1-x_2)$得 $k=-\frac{x_0}{2y_0}$，根据题意，$m=-\frac{1}{k}$，代入点 $M(x_0, y_0)$ 即 $y_0=\frac{2y_0}{x_0}\cdot x_0+\frac{1}{2}\Rightarrow y_0=-\frac{1}{2}$，点$M(x_0, y_0)$在椭圆内，故 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<x_0<\frac{\sqrt{6}}{2}$，$m=\frac{2y_0}{x_0}=-\frac{1}{x_0}\in\left(-\infty, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$；

(2) $y+\frac{1}{2}=k(x-x_0)\Rightarrow y=kx-\left(x_0^2+\frac{1}{2}\right)$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$，$d=\frac{\left|x_0^2+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}\left|x_0^2+\frac{1}{2}\right|\frac{\sqrt{2k^2+1-\left(x_0^2+\frac{1}{2}\right)^2}}{2k^2+1}=\sqrt{2}\left|x_0^2+\frac{1}{2}\right|\frac{\sqrt{2x_0^2+1-\left(x_0^2+\frac{1}{2}\right)^2}}{2x_0^2+1}$（不要问为什么，去找前面的椭圆的设点设线基础部分）令 $x_0^2+\frac{1}{2}=t\in(0, 2)$，所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2t-t^2}$，当且仅当 $t=1$，$S_{\triangle AOB}$取得最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

专题7　定比点差法破解极点与极线

⬅⬅⬅达标训练

1. 【解析】设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，由 $P(0, 1)$，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，即有 $x_1=-2x_2$，$y_1+2y_2=3$，即为 $\begin{cases}x_1^2+4y_1^2=4m① \\ 4x_2^2+16y_2^2=16m②\end{cases}$，

①－②得$(y_1-2y_2)(y_1+2y_2)=-3m$，

可得 $y_1-2y_2=-m$，解得 $y_1=\frac{3-m}{2}$，

$y_2=\frac{3+m}{4}$，则 $m=x_2^2+\left(\frac{3-m}{2}\right)^2$，即有 $x_2^2=m-\left(\frac{3-m}{2}\right)^2=\frac{-m^2+10m-9}{4}=\frac{-(m-5)^2+16}{4}$，

即有 $m=5$ 时，x_2^2 有最大值4，即点 B 横坐标的绝对值最大. 故答案为5.

2. 【解析】(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$N(\sqrt{3}, 0)$，$\overrightarrow{NB}+3\overrightarrow{NA}=0\Rightarrow\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NA}$，所以 $\sqrt{3}=\frac{x_2+3x_1}{4}$，

$\begin{cases}9\cdot\frac{x_1^2}{4}+9y_1^2=9① \\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1②\end{cases}$ ①－②得：$\frac{(3x_1+x_2)(3x_1-x_2)}{4}+(3y_1+y_2)(3y_1-y_2)=8$，即 $\frac{3x_1-x_2}{2}=\frac{4}{\sqrt{3}}$，所以 $x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y_2=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $k=\frac{y_2-0}{x_2-\sqrt{3}}=\pm\sqrt{2}$，所以 $y=\pm\sqrt{2}(x-\sqrt{3})$.

3. 【解析】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}}$，故令 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$　$\overrightarrow{AQ}=-\lambda\overrightarrow{QB}$；

故 $\begin{cases}\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4 \\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=1\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=x_Q \\ \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=y_Q\end{cases}$ 由于 A，B 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1① \\ \frac{\lambda^2x_2^2}{4}+\frac{\lambda^2y_2^2}{3}=\lambda^2②\end{cases}$

①－②得：$\frac{(x_1-\lambda x_2)(x_1+\lambda x_2)}{4(1-\lambda)(1+\lambda)}+\frac{(y_1-\lambda y_2)(y_1+\lambda y_2)}{3(1-\lambda)(1+\lambda)}=1$，即 $\frac{4x_Q}{4}+\frac{y_Q}{3}=1$，即 $3x+y-3=0$，Q 总在直线 $3x+y-3=0$ 上.

4. 【解析】(1) C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(2)略.　(3)略.

5. (1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2) R 在定直线 $x=-1$ 上.

6. 【解析】(1) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)(i)参考例4(2018年新课标高考题)；

获取更多资料加qq群698274639

(ii)设$\angle NFB=\alpha$，根据焦长公式可得，$|NF|=\frac{b^2}{a-c\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}-\cos\alpha}$，$|MF|=\frac{b^2}{a+c\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}+\cos\alpha}$，$\angle MFN=180°-2\alpha$，$S_{MFN}=\frac{1}{2}|MF|\cdot|NF|\sin 2\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2-\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{2\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{2\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$.

7. 【解析】(1)$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$G(x_3,y_3)$，$H(x_4,y_4)$，设$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FG}$，$F\left(\frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_3}{1+\lambda}\right)=(1,0)$，$\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{FH}$，$F\left(\frac{x_2+\mu x_4}{1+\mu},\frac{y_2+\mu y_4}{1+\mu}\right)=(1,0)$，有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1①\\ \frac{\lambda^2x_3^2}{2}\pm\lambda^2y_3^2=\lambda^2②\end{cases}$

①-②得：$\frac{(x_1+\lambda x_3)(x_1-\lambda x_3)}{2(1-\lambda^2)}\pm\frac{(y_1+\lambda y_3)(y_1-\lambda y_3)}{1-\lambda^2}=1$.

即$\frac{x_1-\lambda x_3}{1-\lambda}=2$.$\begin{cases}\frac{x_1-\lambda x_3}{1-\lambda}=2\\ \frac{x_1+\lambda x_3}{1+\lambda}=1\end{cases}\Rightarrow x_1=-\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2}③$，

同理$\begin{cases}\frac{x_2-\mu x_4}{1-\mu}=2\\ \frac{x_2+\mu x_4}{1+\mu}=1\end{cases}\Rightarrow x_2=-\frac{\mu}{2}+\frac{3}{2}④$，

故$x_1+x_2=3-\frac{1}{2}(\lambda+\mu)⑤$，

所以$\lambda+\mu=6-2(x_1+x_2)$，$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x+2)\end{cases}\Rightarrow(2k^2+1)x^2+8k^2x+8k^2-2=0$，$\Delta>0\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_1+x_2=\frac{-8k^2}{2k^2+1}=\frac{-8}{2+\frac{1}{k^2}}\in(-2,0)$，所以$\lambda+\mu=6-2(x_1+x_2)\in(6,10)$.

8. (1)$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；(2)λ的取值范围是$(3-2\sqrt{2},1)$.

9. (1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；(2)$\left[\frac{1}{3},3\right]$.

10. (1)$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$；

(2)定直线$x=\frac{9}{4}$，$\lambda\in\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$.

11. (1)$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

(2)$|AB|$的最大值为$\sqrt{6}$；

(3)2.（参考例题5：2018 · 北京卷）

12. 【解析】(1)设椭圆的半焦距为c. 由题意知$2a=4$，$2c=2\sqrt{2}$，所以$a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$. 所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；

(2)证明：(i)设$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，由$M(0,m)$，可得$P(x_0,2m)$，$Q(x_0,-2m)$. 所以直线PM的斜率$k_1=\frac{2m-m}{x_0}=\frac{m}{x_0}$，直线$QM$的斜率$k_2=\frac{-2m-m}{x_0}=-\frac{3m}{x_0}$，此时$\frac{k_2}{k_1}=-3$；

(ii)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{BM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，根据定比点差法$\begin{cases}x_1+\lambda x_0=0\\ x_2+\mu x_0=0\end{cases}$，

$\begin{cases}y_1=\frac{m+\frac{2}{m}}{2}+\frac{m-\frac{2}{m}}{2}\lambda\\ y_2=\frac{m+\frac{2}{m}}{2}+\frac{m-\frac{2}{m}}{2}\mu\end{cases}$，$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{m-\frac{2}{m}}{2x_0}$，

令$\begin{cases}x_0=2\cos\theta\\ 2m=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，故$k=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2\theta-2\sqrt{2}}{4\sin\theta\cos\theta}$，

$k=\frac{\sqrt{2}(3\sin^2\theta+4\cos^2\theta)}{8\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(3\tan\theta+\frac{4}{\tan\theta}\right)\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$，当仅当$\tan\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时等号成立.

专题8　仿射大法大破天机

达标训练

1. D 【解析】设AB的中点为$M(x_0,y_0)$，根据以上模型$\begin{cases}\frac{k_{OM}}{1}=\frac{1}{4}=\frac{y_0}{x_0}\\ 2x_0-2y_0-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=2\\ y_0=\frac{1}{2}\end{cases}$，所以

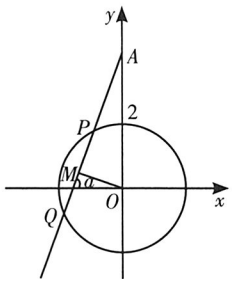
获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$M\left(2, \frac{1}{2}\right)$，故选 D.

2. 【解析】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow$令$\begin{cases}x'=\frac{x}{2}\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2x'\\ y=y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=1$，拉伸后 $A(0,-2)$ 不变，$S_{\triangle OP'Q'}=\frac{1}{2}S_{\triangle OPQ}k_{P'Q'}=2k_{PQ}$；令 $P'Q'$ 倾斜角为 α，$P'Q'$ 的中点为 M，$OM=2\cos\alpha$，$P'M=Q'M=\sqrt{1-(2\cos\alpha)^2}$，故 $S_{\triangle OP'Q'}=|2\cos\alpha|\sqrt{1-(2\cos\alpha)^2}=\sqrt{(2\cos\alpha)^2[1-(2\cos\alpha)^2]}\leqslant\frac{1}{2}$，当仅当$(2\cos\alpha)^2=1-(2\cos\alpha)^2\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$时，等号成立，此时 $k_{P'Q'}=2k_{PQ}=\pm\sqrt{7}\Rightarrow k_{PQ}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，故直线 l 方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}x+2$.



3. 【解析】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$；

(2)证明：$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1\Rightarrow$令$\begin{cases}x'=x\\ y'=\sqrt{3}y\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x=x'\\ y=\frac{y'}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=4$，$D(-1,1)$拉伸后变为 $D'(-1,\sqrt{3})$，$k'_{D'E'}=-\frac{1}{k_{O'D'}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow k_{DE}=\frac{1}{\sqrt{3}}k'_{D'E'}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，$k_{AB}=\frac{0-(-1)}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$，及 $k_{AB}=k_{DE}=\frac{1}{3}$，所以$AB/\!/DE$.

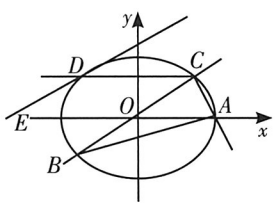


图 1

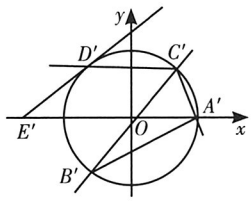


图 2

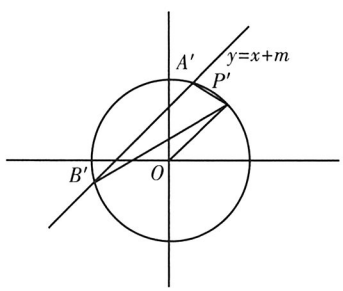
4. 【解析】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)$S_{\triangle QOB}=2S_{\triangle AOB}$，根据几何性质可知，当 $AB/\!/x$ 轴时，$\angle AOB_{\max}=120°$，当 $\angle AOB=90°$ 时 $S_{\triangle AOB}$ 面积最大，此时令切点 $M(x_0,y_0)$，满足 $|OM|=\sqrt{2}$，即有$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=2\\ \frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\\ y_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\end{cases}\Rightarrow$

$M\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，根据切线方程$\frac{xx_0}{4}+yy_0=1$，直线 l 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x\pm\sqrt{3}$.

5. 【解析】(1)$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{2}=1$(注意分析此椭圆焦点在 y 轴上)；

(2)$x=\frac{x'}{\sqrt{2}}$，$y=y'$及将椭圆横向拉伸得$\frac{y'^2}{4}+\frac{x'^2}{4}=1$，直线方程变为 $y'=x'+m$，$P(1,\sqrt{2})$变为 $P'(\sqrt{2},\sqrt{2})$如图：易知 $OP'/\!/A'B'$，$S_{\triangle ABC}=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{\sqrt{2}}=\frac{S_{\triangle OA'B'}}{\sqrt{2}}S_{\triangle OA'B'}=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot\sin(\angle A'OB')$，故仅当$\angle A'OB'=90°$时三角形的面积有最大值，$S_{\triangle OA'B'}=\frac{1}{2}\cdot R^2=\frac{1}{2}\cdot 4=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{\sqrt{2}}=\frac{S_{\triangle OA'B'}}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

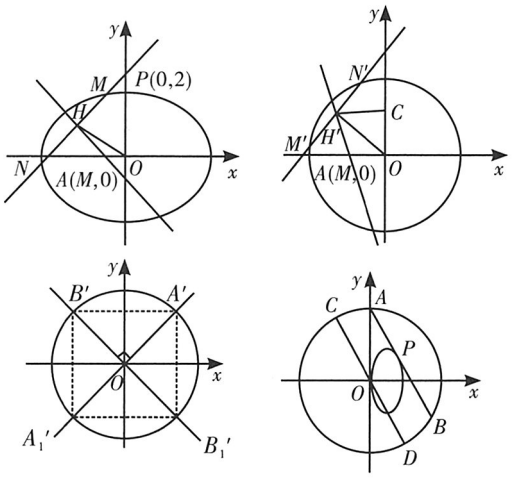


获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

6. 【解析】(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2) 拉伸后如图所示：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\y'=\frac{2}{\sqrt{3}}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=4$ 拉伸后比值斜率不变，设 $H'(x_0',\ y_0')$，故 $\frac{k_{OH'}}{k_{A'H'}}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}=\frac{y_0'}{x_0'}\cdot\frac{x_0'-m}{y_0'}\Rightarrow x_0'=4m.$



如图：过 H 点做 y 轴的垂线．垂足为 C，$CH'=|x_0|$，$CD=|y_0|$ 则由射影定理得：$x_0'^2=y_0'\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-y_0'\right)$.

结合上一式子得 $y_0'^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y_0'+16m^2=0$，该式肯定有解．$\Lambda=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2-64m^2\geqslant 0\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{6}\leqslant m\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$，易知 $m=0$ 时，无意义，故 m 的取值范围为 $-\frac{\sqrt{3}}{6}\leqslant m<0$ 或 $0<m\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$.

7. 【解析】(1)椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；(2) $k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{3}{4}=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow OA'\perp OB'$，$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\y'=\frac{2}{\sqrt{3}}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}y'\end{cases}\Rightarrow x'^2+y'^2=4$，$S=\frac{b}{a}S'=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot a^2=4\sqrt{3}.$

8. 【解析】(1)设 AB 中点坐标为 $M\left(\frac{4}{3},\ y_0\right)$，代入圆方程可得 $y_0=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$；根据拉伸定理可知 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{1}{4}\Rightarrow k_{AB}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，将 $M\left(\frac{4}{3},\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ 代入可知 $m=\pm\sqrt{2}$，故 $m=\sqrt{2}$；

(2) $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$，令 $\begin{cases}x=x'\\2y=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'^2+y'^2=16\\(x'-1)^2+\frac{y'^2}{4}=1\end{cases}$，拉伸后可知，$\lambda=\frac{|AB|}{|CD|}$ 最小时，AB 与 CD 距离最大，令拉伸后的 C_2 参数方程为 $\begin{cases}x'=1+\cos\theta\\y'=2\sin\theta\end{cases}$，当 C_2 上的点 P 离原点距离最大时，即 $|OP|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{-3\cos^2\theta+2\cos\theta+5}$，当 $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 时，$|OP|_{\max}=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，此时过 P 作 C_2 的切线 $A'B'$，$A'B'=2\sqrt{16-\frac{16}{3}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$，$\lambda_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

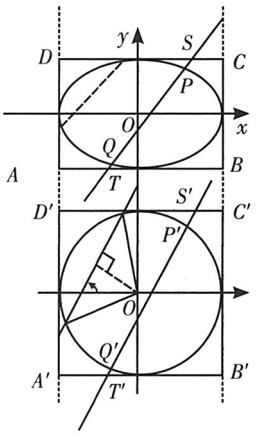
9. 【解析】(1) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\cdots①$

矩形 $ABCD$ 面积为 8，即 $2a\cdot 2b=8\cdots②$

由①②解得：$a=2$，$b=1$，

所以椭圆 M 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)作伸缩变换，令 $x'=x$，$y'=2y$，则椭圆 E 变为圆 E'：$x'^2+y'^2=4$，设此时 P，Q，S，T，A，B，C，D 对应的点分别为 P'，Q'，S'，T'，A'，B'，C'，D'，如图所示；直线 l' 方程变为 $y'=2x'+2m$，设 l' 倾斜角为 θ，则有 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\frac{|PQ|}{|ST|}=\frac{|P'Q'|}{|S'T'|}$，当 l 过 A 点时，$m=1$，当 l 过 C 点时，$m=-1$.



获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

①当$\sqrt{5}>m>1$时，有$|S'T'|=\sqrt{5}(3-m)$，$|P'Q'|=2\sqrt{4-(m\sin\theta)^2}=2\sqrt{4-\frac{4}{5}m^2}\frac{|PQ|}{|ST|}=\frac{|P'Q'|}{|S'T'|}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{5-m^2}{(3-m)^2}}=\frac{4}{5}\sqrt{-\frac{4}{t^2}+\frac{6}{t}-1}$，其中$t=3-m$，由此知当$\frac{1}{t}=\frac{3}{4}$，即$t=\frac{4}{3}$，$m=\frac{5}{3}\in(1,\sqrt{5})$时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值$\frac{2}{5}\sqrt{5}$；

②由对称性，可知若$-\sqrt{5}<m<-1$，则当$m=-\frac{5}{3}$时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值$\frac{2}{5}\sqrt{5}$；

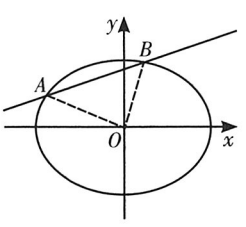
③当$-1\leqslant m\leqslant 1$时，$|S'T'|=2\sqrt{5}$，$\frac{|P'Q'|}{|S'T'|}=\frac{2}{5}\sqrt{5-m^2}$，由此知，当$m=0$时，$\frac{|PQ|}{|ST|}$取得最大值$\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

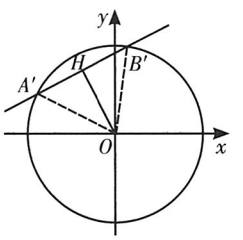
10. 【解析】(1)椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)拉伸后如图，设$A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$，则有$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)^2=\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2$，利用合比的性质：$\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)^2=\left(\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\right)^2=k'^2$；利用到数相等可以得到，$k'=\pm1\Rightarrow k=\pm\frac{1}{2}$，由$k'=1$，及等比的性质，圆的性质，可以得到

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2\\x_1^2+y_1^2=2^2\\x_2^2+y_2^2=2^2\end{cases}\Rightarrow x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=2^2,$$

$OA^2+OB^2=x_1^2+\left(\frac{1}{2}y_1\right)^2+x_2^2+\left(\frac{1}{2}y_2\right)^2=x_1^2+x_2^2+\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)=4+1=5.$





定理：若k_{OA}，k_{AB}，k_{OB}成等比数列，则$k_{AB}^2=k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow K_{AB}=\pm\frac{b}{a}$，且$OA^2+OB^2=a^2+b^2$.

证明：拉伸后如图，设$A'(x_1,y_1)$，$B'(x_2,y_2)$，则有$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)^2=\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2$利用合比的性质：$\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)^2=\left(\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\right)^2=k'^2$利用到数相等可以得到，$k'=\pm1\Rightarrow k=\pm\frac{b}{a}$，由$k'=1$，及等比的性质，圆的方程，可以得到

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2\\x_1^2+y_1^2=a^2\\x_2^2+y_2^2=a^2\end{cases}\Rightarrow x_1^2+x_2^2=y_1^2+y_2^2=a^2$$

$OA^2+OB^2=x_1^2+\left(\frac{b}{a}y_1\right)^2+x_2^2+\left(\frac{b}{a}y_2\right)^2=x_1^2+x_2^2+\frac{b^2}{a^2}(y_1^2+y_2^2)=a^2+b^2.$

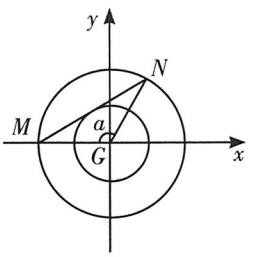
11. 【解析】(1)因为椭圆C的中心在原点O，左焦点为$F_1(-1,0)$，所以$c=1$，$a=2$，所以$b^2=4-1=3$，椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(1)椭圆C的3倍相似椭圆C_2的方程为：

$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$，将$\begin{cases}x'=x\\y'=\frac{2}{\sqrt{3}}y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}y'\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}C_1':\ x'^2+y'^2=4\\C_2':\ x'^2+y'^2=12\end{cases}$$

如图：



$$\left.\begin{array}{l}|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|\\|M'N'|=2\sqrt{R^2+r^2}=\sqrt{1+k'^2}\,|x_1-x_2|=4\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$|MN|=4\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+k^2}{1+k'^2}}=4\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+k^2}{1+\frac{4}{3}k^2}},$$

由于$1+\frac{4}{3}k^2\geqslant 1+k^2$，故当仅当$k=0$时，$|MN|_{\max}=4\sqrt{2}$.

12. (1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

(2)$s^2+t^2=1$.

获取更多资料加qq群698274639

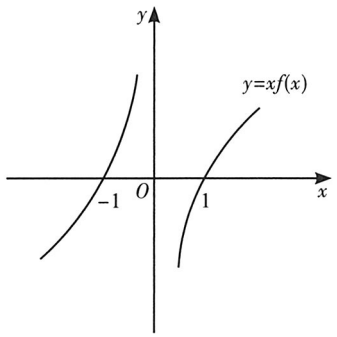
 获取更多资料加qq群698274639

第5章　独孤九剑震群雄　压轴导数考神路

专题1　抽象函数的导函数构造

达标训练

1. B 【解析】因为$[x\cdot f(x)]'=f(x)+x\cdot f'(x)>0$，故函数$g(x)=xf(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 再根据函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，可得函数$g(x)=xf(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，故函数$g(x)=xf(x)$是$R$上的奇函数，故函数$g(x)=xf(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增. 因为$f(1)=0$，所以$f(-1)=0$，故函数$y=xf(x)$的单调性的示意图，如图所示：由不等式$x\cdot f(x)>0$，可得$x$与$f(x)$同时为正数或同时为负数，所以$x>1$，或$-1<x<0$，故不等式$x\cdot f(x)>0$的解集为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$，故选B.



2. C 【解析】令$g(x)=xf(x)$，则$g'(x)=f(x)+xf'(x)>0$，所以$g(x)$为递增函数，因为$e>1>\frac{1}{e}$，所以$g(e)>g(1)>g\left(\frac{1}{e}\right)$，所以$ef(e)>f(1)>\frac{1}{e}f\left(\frac{1}{e}\right)$，又$f(x)$为奇函数，所以$-ef(-e)=ef(e)$，所以$b>c>a$，故选C.

3. C 【解析】令$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，因为对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f'(x)>f(x)$，所以$g'(x)>0$，即$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$g(3)>g(2)$，即$\frac{f(3)}{e^3}>\frac{f(2)}{e^2}$，所以$e^3f(2)<e^2f(3)$，故选C.

4. D 【解析】令$g(x)=e^xf(x)$，则$g'(x)=e^x(f(x)+f'(x))>0$，故$g(x)$在R递增，而$g(0)=f(0)=4$，故不等式$e^xf(x)>4$，即$g(x)>g(0)$，解得：$x>0$，故不等式的解集是$(0,+\infty)$，故选D.

5. C 【解析】设$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$f'(x)>f(x)$，所以$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上递增，不等式$f(2\ln x)<x^2$即为$\frac{f(2\ln x)}{x^2}<1$，$(x>0)$，即$\frac{f(2\ln x)}{e^{2\ln x}}<1$，$x>0$. 因为$g(2)=\frac{f(2)}{e^2}=1$，所以$g(2\ln x)<g(2)$，所以$2\ln x<2$，所以$0<x<e$，故选C.

6. B 【解析】令$g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$x<0$，故$g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}<0$，因为$f(2017+x)-(x+2017)^2f(-1)<0$，所以$(2017+x)^2g(2017+x)-(2017+x)^2g(-1)<0$，因为$g(x)$在$(-\infty,0)$单调递减，所以$\begin{cases}2017+x<0\\ g(2017+x)<g(-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2017+x<0\\ 2017+x>-1\end{cases}$，解得：$-2018<x<-2017$，故选B.

7. B 【解析】令$g(x)=e^{-x}f(x)-4e^{-x}$，则$g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)+4e^{-x}=e^{-x}[f'(x)-f(x)+4]<0$，所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上递减，由$f(x)>e^x+4$，得$e^{-x}f(x)>1+4e^{-x}$，得$e^{-x}f(x)-4e^{-x}>1+4e^{-x}-4e^{-x}=1$，所以$g(x)>1=g(0)$，所以$x<0$，故选B.

8. C 【解析】由题意得，函数$y=f(x-1)$的图像关于点$(1,0)$对称，故$f(x)$的图像关于原点对

 获取更多资料加qq群698274639

称，故$f(x)$是奇函数，由函数$y=f(x)$对于任意的$x\in(0,\pi)$满足$f'(x)\sin x>f(x)\cos x$，令$g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$，故$g'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}>0$，故$g(x)$在$(0,\pi)$递增，故$g\left(\frac{\pi}{6}\right)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)<g\left(\frac{\pi}{2}\right)<g\left(\frac{3\pi}{4}\right)<g\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，故$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，$2f\left(\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$，因为$f(x)$是奇函数，所以A，B，D错误，C正确，故选C.

9. C 【解析】根据题意，设$g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，$g(-x)=\frac{f(-x)}{\cos(-x)}=\frac{f(x)}{\cos x}$，可得$g(x)$为偶函数，其导数为$g'(x)=\frac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$，又由$0<x<\frac{\pi}{2}$时，有$f'(x)\cos x+f(x)\sin x<0$，则有$g'(x)<0$，则函数$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为减函数，又由偶函数$f(x)$为定义在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上，$f(x)>2f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x$，即为$\frac{f(x)}{\cos x}>2f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}$，即有$g(x)>g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，又由$g(x)$为偶函数且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为减函数，且其定义域为$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则有$|x|<\frac{\pi}{3}$，解可得$-\frac{\pi}{3}<x<0$或$0<x<\frac{\pi}{3}$，解集为$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，故选C.

10. A 【解析】因为$\frac{2f(x)-xf'(x)}{x+1}>0$，所以$x<-1$时，$2f(x)-xf'(x)<0$. $-1<x<0$时，$2f(x)-xf'(x)>0$. 构造函数$g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$，$x<-1$时，$g'(x)<0$；$-1<x<0$，$g'(x)>0$. 所以$g(-e)>g(-1)$，所以$\frac{f(-e)}{(-e)^2}>\frac{f(-1)}{(-1)^2}$，化为：$f(-e)-e^2f(-1)>0$，故选A.

11. C 【解析】因为$xf'(x)-f(x)=x^2+x$，所以$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=1+\frac{1}{x}$，所以$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=1+\frac{1}{x}$，所以$\frac{f(x)}{x}=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=x+\ln x+C$，所以$f(x)=x^2+x\ln x+Cx$，所以$f(1)=1+1\ln1+C=1+C$，因为$f(1)\geqslant1$，所以$1+C\geqslant1$，所以$C\geqslant0$，所以$f(x)$的解析式可能是$x^2+x\ln x+x$，故选C.

12. C 【解析】根据题意，设$g(x)=\ln x\cdot f(x)(x>0)$，其导数$g'(x)=(\ln x)'f(x)+\ln xf'(x)=\frac{1}{x}f(x)+\ln xf'(x)$，又由当$x>0$时，$f'(x)\cdot x\ln x+f(x)<0$，则有$g'(x)=\frac{1}{x}f(x)+\ln xf'(x)<0$，即函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，又由$g(1)=\ln1\cdot f(x)=0$，则在区间$(0,1)$上，$g(x)=\ln x\cdot f(x)>0$，又由$\ln x<0$，则$f(x)<0$，在区间$(1,+\infty)$上，$g(x)=\ln x\cdot f(x)<0$，又由$\ln x>0$，则$f(x)<0$，则$f(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上，$f(x)<0$，又由$f(x)$为奇函数，则在区间$(-1,0)$和$(-\infty,-1)$上，都有$f(x)>0$，$(x^2-1)f(x)<0\Rightarrow\begin{cases}x^2-1>0\\f(x)<0\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-1<0\\f(x)>0\end{cases}$，解可得：$x>1$或$-1<x<0$，则$x$的取值范围是$(-1,0)\cup(1,+\infty)$，故选D.

13. A 【解析】因为$(x\ln x)f'(x)<f(x)$，所以$x>$

获取更多资料加qq群698274639

0，所以 $\ln x f'(x) < \frac{f(x)}{x}$，所以 $\ln x f'(x) - \frac{f(x)}{x} < 0$，即 $\left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)' < 0$，设 $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$，则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减，所以 $g(\sqrt{e}) > g(2e)$，即 $2f(\sqrt{e}) > f(e)$，故选 A.

14. D 【解析】根据题意，设 $g(x) = x^2 f(x)$，$x > 0$，其导数 $g'(x) = [x^2 f(x)]' = 2x f(x) + x^2 f'(x) = x[2f(x) + xf'(x)]$，又由 $2f(x) + xf'(x) > x^2 \geqslant 0$，且 $x > 0$，则 $g'(x) \geqslant 0$，则函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \infty)$ 上为增函数，$(x-2016)^2 f(x-2016) - 4f(2) > 0 \Rightarrow (x-2016)^2 f(x-2016) > 2^2 f(2) \Rightarrow g(x-2016) > g(2)$，又由函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \infty)$ 上为增函数，则有 $x - 2016 > 2$，解可得：$x > 2018$，即不等式 $(x-2016)^2 f(x-2016) - 4f(2) > 0$ 的解集为 $(2018, +\infty)$，故选 D.

15. B 【解析】设 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$，则 $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$，即函数 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，因为 $f'(x) = f'(4-x)$，即导函数 $y = f'(x)$ 关于直线 $x = 2$ 对称，所以函数 $y = f(x)$ 是中心对称图形，且对称中心 $(2, 1)$，由于 $f(4) = 0$，即函数 $y = f(x)$ 过点 $(4, 0)$，其关于点 $(2, 1)$ 的对称点 $(0, 2)$ 也在函数 $y = f(x)$ 上，所以有 $f(0) = 2$，所以 $F(0) = \frac{f(0)}{e^0} = 2$，而不等式 $f(x) - 2e^x < 0$ 即 $\frac{f(x)}{e^x} < 2$，即 $F(x) < F(0)$，所以 $x > 0$，故使得不等式 $f(x) - 2e^x < 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(0, +\infty)$. 故选 B.

16. C 【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$，所以 $g'(x) = \frac{(x-2)f'(x) - f(x)}{(x-2)^2}$，因为 $(x-2)[f(x) + 2f'(x) - xf'(x)] > 0$，所以 $(x-2)[(x-2)f'(x) - f(x)] < 0$，当 $x > 2$ 时，$(x-2)f'(x) - f(x) < 0$，即 $g'(x) < 0$，所以 $g(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减，当 $x < 2$ 时，$(x-2)f'(x) - f(x) > 0$，即 $g'(x) > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增，所以 $g(4) < g(3) < g(\sqrt{5})$，所以 $\frac{f(4)}{4-2} < \frac{f(3)}{3-1} < \frac{f(\sqrt{5})}{\sqrt{5}-2}$，所以 $f(4) < 2f(3) < (2\sqrt{5}+4)f(\sqrt{5})$，故选 C.

17. C 【解析】令 $g(x) = f(x) - x^3$，因为 $f(x) - f(-x) = 2x^3$，所以 $f(x) - x^3 = f(-x) - (-x)^3$. 即 $g(x) = g(-x)$，所以 $g(x)$ 为偶函数. 因为 $x \geqslant 0$ 时 $f'(x) - 3x^2 \geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 递增，不等式 $f(2x) - f(x-1) > 7x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ 的解集 $\Leftrightarrow g(2x) > g(x-1)$. 所以 $|2x| > |x-1| \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 > 0$，所以 $x > \frac{1}{3}$ 或 < -1，故选 C.

18. B 【解析】因为 $f(-x) + f(x) = x^2$，所以 $f(x) - \frac{1}{2}x^2 + f(-x) - \frac{1}{2}x^2 = 0$，令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$，因为 $g(-x) + g(x) = f(-x) - \frac{1}{2}x^2 + f(x) - \frac{1}{2}x^2 = 0$，所以函数 $g(x)$ 为奇函数. 因为 $x \in (0, +\infty)$ 时，$f'(x) > x$. 所以 $x \in (0, +\infty)$ 时，$g'(x) = f'(x) - x > 0$，故函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也是增函数，由 $f(0) = 0$，可得 $g(x)$ 在 R 上是增函数. $f(2-a) - f(a) \geqslant 2 - 2a$，等价于 $f(2-a) - \frac{(2-a)^2}{2} \geqslant f(a) - \frac{a^2}{2}$，即 $g(2-a) \geqslant g(a)$，所以 $2 - a \geqslant a$，解得 $a \leqslant 1$，故选 B.

19. A 【解析】设 $g(x) = f(x) - x - x^2$，则 $g(x) -$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$g(-x)=f(x)-f(-x)-2x=0$，所以$g(x)$是偶函数．当$x>0$时，$g'(x)=f'(x)-1-2x>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上是减函数．因为$f(a+1)\geqslant f(-a)+4a+2$，所以$f(a+1)-(a+1)-(a+1)^2\geqslant f(-a)-(-a)-(-a)^2$，所以$g(a+1)\geqslant g(-a)=g(a)$，所以$(a+1)\geqslant|a|$，解得$a\geqslant-\frac{1}{2}$，故选A.

20. A 【解析】设$g(x)=e^{2x}f(x)-e^{2x}$，则$g'(x)=e^{2x}[2f(x)+f'(x)-2]>0$恒成立：所以$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增，又$f(\ln a)>1+\left(\frac{e}{a}\right)^2\Leftrightarrow a^2[f(\ln a)-1]>e^2\Leftrightarrow e^{2\ln a}[f(\ln a)-1]>e^2[(f(1)-1]$．$\Leftrightarrow g(\ln a)>g(1)$．所以$\ln a>1$，所以$a>e$，故选A.

21. D 【解析】根据题意，设$g(x)=\ln x\cdot f(x)(x>0)$，其导数$g'(x)=(\ln x)'f(x)+\ln x f'(x)=\frac{1}{x}f(x)+\ln x f'(x)$，又由当$x>0$时，$x\ln x\cdot f'(x)<-f(x)$，即$\ln x\cdot f'(x)<-\frac{1}{x}f(x)$，则有$g'(x)=\frac{1}{x}f(x)+\ln x f'(x)<0$，即函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，又由$g(1)=\ln 1\cdot f(x)=0$，则在区间$(0,1)$上，$g(x)=\ln x\cdot f(x)>0$，又由$\ln x<0$，则$f(x)<0$，在区间$(1,+\infty)$上，$g(x)=\ln x\cdot f(x)<0$，又由$\ln x>0$，则$f(x)<0$，则$f(x)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$上，$f(x)<0$，又由$f(x)$为奇函数，则在区间$(-1,0)$和$(-\infty,-1)$上，都有$f(x)>0$，$(x^2-4)f(x)>0\Rightarrow\begin{cases}x^2-4>0\\f(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-4<0\\f(x)<0\end{cases}$，解可得：$x<-2$或$0<x<2$，则$x$的取值范围是$(-\infty,-2)\cup(0,2)$，故选D.

22. A 【解析】令$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，因为$f'(x)<f(x)$，所以$g'(x)<0$．所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减．因为函数$f(x+5)$是偶函数，所以函数$f(-x+5)=f(x+5)$，所以函数关于$x=5$对称，所以$f(0)=f(10)=1$，原不等式等价为$g(x)<1$，因为$g(0)=\frac{f(0)}{e^0}=1$．所以$g(x)<1\Leftrightarrow g(x)<g(0)$，因为$g(x)$在$R$上单调递减，所以$x>0$．所以不等式$f(x)<e^x$的解集为$(0,+\infty)$，故选A.

23. D 【解析】令$g(x)=xf(x)-2x$，$g'(x)=xf'(x)+f(x)-2$，因为当$x>0$时，$xf'(x)+f(x)>2$，所以$x>0$时，$g'(x)>0$，所以$x>0$时，函数$g(x)$单调递增．因为$f(2)=\frac{5}{2}$，所以$g(2)=2f(2)-4=5-4=1$．因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，所以$f(x)=f(|x|)$．所以不等式$|x|\cdot f(x)>2|x|+1$，即不等式$|x|\cdot f(|x|)-2|x|>1$，所以$g(|x|)>g(2)$，所以$|x|>2$．解得$x<-2$或$x>2$．所以不等式$|x|\cdot f(x)>2|x|+1$的解集为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，故选D.

24. C 【解析】构造函数$g(x)=x^2f(x)-x^2$．因为$g'(x)=2x\cdot\left[f(x)+\frac{1}{2}x\cdot f'(x)-1\right]>0$，在$x\in(0,+\infty)$恒成立，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，因为$1<3$，所以$g(1)<g(3)$得$f(1)+8<9f(3)$，故选C.

25. D 【解析】令$g(x)=\frac{f(x)}{\ln 2x}$，$\left(x>\frac{1}{2}\right)$，则$g'(x)=\frac{f'(x)\ln 2x-\frac{1}{x}f(x)}{\ln^2 2x}=\frac{xf'(x)\ln 2x-f(x)}{x\ln^2 2x}$，因为$x>\frac{1}{2}$，$xf'(x)\ln 2x>f(x)$，所以$g'(x)>$

获取更多资料加qq群698274639

0，即 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增，又 $g\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln e}=1$，所以当 $\frac{1}{2}<x<\frac{e}{2}$ 时，$g(x)<1$，即 $f(x)<\ln 2x$，令 $\frac{e^x}{2}=t$，则 $x=\ln 2t$，不等式 $f\left(\frac{e^x}{2}\right)<x$ 等价于 $f(t)<\ln 2t$，所以 $\frac{1}{2}<t<\frac{e}{2}$，即 $\frac{1}{2}<\frac{e^x}{2}<\frac{e}{2}$，解得 $0<x<1$，故选 D.

26. 【解析】令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，因为 $g(x)+g(-x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+f(-x)-\frac{1}{2}x^2=0$，所以函数 $g(x)$ 是奇函数，因为 $x\in(0, +\infty)$ 时，$g'(x)=f'(x)-x<0$，函数 $g(x)$ 在 $x\in(0, +\infty)$ 递减，又由题意得 $f(0)=0$，$g(0)=0$，故函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 递减，故 $f(6-m)-f(m)-18+6m=g(6-m)+\frac{1}{2}(6-m)^2-g(m)-\frac{1}{2}m^2-18+6m\geqslant 0$，即 $g(6-m)-g(m)\geqslant 0$，$g(6-m)\geqslant g(m)$，所以 $6-m\leqslant m$，解得 $m\geqslant 3$，故答案为 $[3, +\infty)$.

27. 【解析】因为 $xf'(x)-2f(x)=x^3e^x$，所以 $\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}=e^x$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}=e^x$，所以 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}=e^x+c$，（$c$ 为常数），所以 $f(x)=x^2(e^x+c)$，因为 $f(1)=e+c=e-1$，所以 $c=-1$，所以 $f(x)=x^2(e^x-1)$，因为 $f'(x)=2x(e^x-1)+x^2e^x=(x^2+2x)e^x-2x$，所以 $f(2)=4(e^2-1)$，$f'(2)=8e^2-4$，所以所求切线方程为 $y-4(e^2-1)=(8e^2-4)(x-2)$，即 $y=(8e^2-4)x-12e^2+4$，故答案为 $y=(8e^2-4)x-12e^2+4$.

专题2　构造 $\ln x$ 比大小

达标训练

1. C 【解析】$a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{3}$，$c=\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}$，所以当 $x\in(0, e)$ 时，$f(x)$ 为增函数，当 $x\in(e, +\infty)$ 时，$f(x)$ 为减函数，则 $f(e)$ 最大，$f(2)=f(4)<f(3)$，所以 $a<b<c$. 故选 C.

2. C

3. C

4. A 【解析】$a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，$e>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，故根据“大指小底”可知 $b>a$，a，$b>0$. 所以 $1>b>a>0$. $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>1$，则 $a<b<c$. 故选 A.

5. B 【解析】根据“大指小底”可知 $a>b$，$a>0$，$b>0$. 所以 $1>a>b>0$. $c=\frac{\log_2\frac{1}{5}}{\log_2\frac{1}{4}}>1$，故选 B.

6. B 【解析】$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)\cdot(\sqrt{1+x^2}-x)+\frac{2^x-1}{2^x+1}+\frac{1-2^x}{1+2^x}=0$，$-f(2-\pi)=f(\pi-2)$，且 $f(x)$ 为单调增函数，根据函数 $\frac{\ln x}{x}$ 性质可知，$\pi-2>1>\frac{1}{e}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 5}{5}$，$f(\pi-2)>f\left(\frac{\ln 3}{3}\right)>f\left(\frac{\ln 5}{5}\right)$，故选 B.

7. D 【解析】$y=\frac{\lg x}{x}=\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{\ln x}{x}$，故 A，B，C 均错误，故选 D.

8. A 【解析】设 $2^a=3^b=6^c=k>1$，则 $a=\frac{\lg k}{\lg 2}>0$，$b=\frac{\lg k}{\lg 3}>0$，$c=\frac{\lg k}{\lg 6}>0$. 可得 $x=\frac{2\ln k}{\ln 2}=\frac{4\ln k}{\ln 4}$，$y=\frac{3\ln k}{\ln 3}$，$z=\frac{6\ln k}{\ln 6}$，所以 $y<x<z$，故选 A.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

9. >

10. 【解析】$f(x)=x^{\frac{1}{x}}=x^{\frac{\ln x}{x}}$，由于指数$\frac{\ln x}{x}$在$x=e$时取得最大值，故数列选项中最大的是$\sqrt[3]{3}$.

11. 【解析】(1)因为$y=\frac{\ln x}{x}$，所以$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以l的斜率$k=y'|_{x=1}=1$，所以l的方程为$y=x-1$.

(2)证明：令$f(x)=x(x-1)-\ln x$，$(x>0)$曲线C在直线l的下方，即$f(x)=x(x-1)-\ln x>0$，则$f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，又$f(1)=0$，所以$x\in(0,1)$时，$f(x)>0$，即$\frac{\ln x}{x}<x-1 x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>0$，即$\frac{\ln x}{x}<x-1$即除切点$(1,0)$之外，曲线$C$在直线$l$的下方.

12. 【解析】(1)求导数可得$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，因为$f(x)$在$(1,+\infty)$上是单调减函数，所以$\frac{1}{x}-a\leqslant 0$在$(1,+\infty)$上恒成立，所以$a\geqslant\frac{1}{x}$，$x\in(1,+\infty)$. 所以$a\geqslant 1$. 令$g'(x)=e^x-a=0$，得$x=\ln a$. 当$x<\ln a$时，$g'(x)<0$；当$x>\ln a$时，$g'(x)>0$. 又$g(x)$在$(1,+\infty)$上有最小值，所以$\ln a>1$，即$a>e$. 故a的取值范围为：$a>e$；

(2)当$a\leqslant 0$时，$g(x)$必为单调函数；当$a>0$时，令$g'(x)=e^x-a>0$，解得$a<e^x$，即$x>\ln a$，因为$g(x)$在$(-1,+\infty)$上是单调增函数，类似(1)有$\ln a\leqslant -1$，即$0<a\leqslant\frac{1}{e}$. 结合上述两种情况，有$a\leqslant\frac{1}{e}$. 判断$f(x)=\ln x-ax$的零点个数，只需判断$y=a$与$h(x)=\frac{\ln x}{x}$的交点个数，根据函数$h(x)=\frac{\ln x}{x}$在区间$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，显然当$a\leqslant 0$或$a=\frac{1}{e}$时，$h(x)$与$y=a$只有一个交点，当$0<a<\frac{1}{e}$时，$h(x)$与$y=a$有两个交点. 综合，当$a\leqslant 0$或$a=\frac{1}{e}$时，$f(x)$的零点个数为1，当$0<a<\frac{1}{e}$时，$f(x)$的零点个数为2.

13. 【解析】(1)因为$f(x)=e^x+e^{-x}$，所以$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$，即函数：$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数；

(2)若关于x的不等式$mf(x)\leqslant e^{-x}+m-1$在$(0,+\infty)$上恒成立，即$m(e^x+e^{-x}-1)\leqslant e^{-x}-1$，因为$x>0$，所以$e^x+e^{-x}-1>0$，即$m\leqslant\frac{e^{-x}-1}{e^x+e^{-x}-1}$在$(0,+\infty)$上恒成立，设$t=e^x$，$(t>1)$，则$m\leqslant\frac{1-t}{t^2-t+1}$在$(1,+\infty)$上恒成立，因为$\frac{1-t}{t^2-t+1}=-\frac{t-1}{(t-1)^2+(t-1)+1}=-\frac{1}{t-1+\frac{1}{t-1}+1}\geqslant-\frac{1}{3}$，当且仅当$t=2$时等号成立，所以$m\leqslant-\frac{1}{3}$；

(3)令$g(x)=e^x+e^{-x}-a(-x^3+3x)$，则$g'(x)=e^x-e^{-x}+3a(x^2-1)$，当$x\geqslant 1$，$g'(x)>0$，即函数$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，故此时$g(x)$的最小值$g(1)=e+\frac{1}{e}-2a$，由于存在$x_0\in[1,+\infty)$，使得$f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，故$e+\frac{1}{e}-2a<0$，即$a>\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$，要比较$e^{a-1}$与$a^{e-1}$的大小，即比

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

较$(a-1)\ln e$与$(e-1)\ln a$大小，即比较$\frac{\ln e}{e-1}$与$\frac{\ln a}{a-1}$大小. 构造函数$h(x)=\frac{\ln x}{x-1}(x>1)$，$h'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$，再令$t(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x$，$t'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，故可知$t(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递减，$t(x)<t(1)=0$，故$h'(x)<0$在区间$(1,+\infty)$恒成立，①$a\in\left(\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right),e\right)\subseteq(1,e)$时，$e^{a-1}<a^{e-1}$；②当$a=e$时，$a^{e-1}=e^{a-1}$；③当$a\in(e,+\infty)\subseteq(e-1,+\infty)$时，当$a>e-1$时，$h(a)>h(e)=0$，即$a-1>(e-1)\ln a$，从而$e^{a-1}>a^{e-1}$.

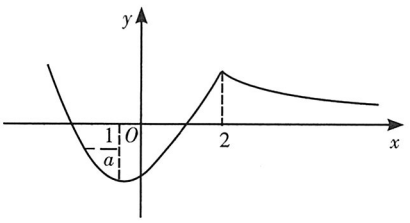
专题3　对数独行侠，指数找朋友

达标训练

1. 【解析】(1)$f'(x)=\frac{(2ax+1)e^x-(ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2}=-\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$. 所以$f'(0)=2$，即曲线$y=f(x)$在点$(0,-1)$处的切线斜率$k=2$，所以曲线$y=f(x)$在点$(0,-1)$处的切线方程为$y-(-1)=2x$. 即$2x-y-1=0$为所求；

(2)证明：函数$f(x)$的定义域为：$\mathbf{R}$，可得$f'(x)=\frac{(2ax+1)e^x-(ax^2+x-1)e^x}{(e^x)^2}=-\frac{(ax+1)(x-2)}{e^x}$.

令$f'(x)=0$，可得$x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{a}<0$，当$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$x\in\left(-\frac{1}{a},2\right)$时，$f'(x)>0$，$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)<0$. 所以$f(x)$在$\left(-\infty,-\frac{1}{a}\right)$，$(2,+\infty)$递减，在$\left(-\frac{1}{a},2\right)$递增，注意到$a\geqslant1$时，函数$g(x)=ax^2+x-1$在$(2,+\infty)$单调递增，且$g(2)=4a+1>0$，函数$f(x)$的图像如下：



$a\geqslant1$，所以$\frac{1}{a}\in(0,1]$，则$f\left(-\frac{1}{a}\right)=-e^{\frac{1}{a}}\geqslant-e$，所以$f(x)_{\min}=-e^{\frac{1}{a}}\geqslant-e$，所以当$a\geqslant1$时，$f(x)+e\geqslant0$.

2. 【解析】(1)函数$f(x)=ax\ln x$的导数为$f'(x)=a(1+\ln x)$，图像上在点$(1,f(1))$处的切线斜率为a，由切线与直线$y=-\frac{1}{2}x$垂直，可得$a=2$，即$f(x)=2x\ln x$；

(2)所有$x\geqslant1$都有$f(x)-mx+2\geqslant0$，即为$2x\ln x-mx+2\geqslant0$，即有$m\leqslant2\ln x+\frac{2}{x}$在$x\geqslant1$恒成立，设$g(x)=2\ln x+\frac{2}{x}$，$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x-1)}{x^2}$，由$x\geqslant1$可得$g'(x)\geqslant0$，$g(x)$递增，可得$g(x)$的最小值为$g(1)=2$，则$m\leqslant2$，即$m$的取值范围是$(-\infty,2]$.

3. 【解析】(1)函数$f(x)=(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$，导数$f'(x)=\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\cdot2\right)e^{-x}-(x-\sqrt{2x-1})e^{-x}=\left(1-x+\frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}}\right)e^{-x}=(1-x)\left(1-\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\right)e^{-x}$；

(2)由$f(x)$的导数$f'(x)=(1-x)\left(1-\frac{2}{\sqrt{2x-1}}\right)e^{-x}$，可得$f'(x)=0$时，$x=1$或$\frac{5}{2}$，当$\frac{1}{2}<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减；当$1<x<\frac{5}{2}$时，$f'(x)>0$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$f(x)$递增；当$x>\frac{5}{2}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，且$x\geqslant\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow x^2\geqslant 2x-1\Leftrightarrow(x-1)^2\geqslant 0$，则$f(x)\geqslant 0$. 由$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，$f(1)=0$，$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}$，即有$f(x)$的最大值为$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$，最小值为$f(1)=0$. 则$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上的取值范围是$\left[0,\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right]$.

4. 【解析】(1)由$f'(x)=\ln x-2ax+2a$，可得$g(x)=\ln x-2ax+2a$，$x\in(0,+\infty)$，所以$g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，当$a\leqslant 0$，$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增；当$a>0$，$x\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增，$x\in\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减. 所以当$a\leqslant 0$时，$g(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$；当$a>0$时，$g(x)$的单调增区间为$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$，单调减区间为$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$；

(2)由(1)知，$f'(1)=0$. ①当$0<a<\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{2a}>1$，由(1)知$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$内单调递增，可得当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，当$x\in\left(1,\frac{1}{2a}\right)$时，$f'(x)>0$. 所以$f(x)$在$(0,1)$内单调递减，在$\left(1,\frac{1}{2a}\right)$内单调递增，所以$f(x)$在$x=1$处取得极小值，不合题意；

②当$a=\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{2a}=1$，$f'(x)$在$(0,1)$内单调递增，在$(1,+\infty)$内单调递减，所以当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$单调递减，不合题意；

③当$a>\frac{1}{2}$时，$0<\frac{1}{2a}<1$，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上单减，当$x\in\left(\frac{1}{2a},1\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减. 所以$f(x)$在$x=1$处取极大值，符合题意.

综上可知，正实数a的取值范围为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

5. 【解析】(1)$f'(x)=b(\ln x+1)$，由$f'(e)=b(1+1)=4$，解得：$b=2$，故$f(x)=2x\ln x+3$，$(x>0)$，$f'(x)=2(\ln x+1)$，令$f'(x)>0$，解得：$x>e^{-1}$，令$f'(x)<0$，解得：$0<x<e^{-1}$，故$f(x)$在$(0,e^{-1})$上递减，在$(e^{-1},+\infty)$上递增，故$f(x)_{极小值}=f(e^{-1})=3-\frac{2}{e}$，无极大值；

(2)若对$\forall x\in(0,+\infty)$有$f(x)-g(x)\geqslant 0$恒成立，即对$\forall x\in(0,+\infty)$都有$2x\ln x+3+x^2-ax\geqslant 0$恒成立，即$a\leqslant 2\ln x+x+\frac{3}{x}$在$x\in(0,+\infty)$恒成立，令$h(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}$，$(x>0)$，$h'(x)=\frac{2}{x}+1-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2+2x-3}{x^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，令$h'(x)>0$，解得：$x>1$，令$h'(x)<0$，解得：$0<x<1$，故$h(x)$在$(0,1)$递减，在$(1,+\infty)$递增，故$h(x)_{min}=h(1)=4$，故$a\leqslant 4$.

6. 【解析】(1)由$f(x)=e^x-ax$，得$f'(x)=e^x-a$. 又$f'(0)=1-a=-1$，解得$a=2$，所以$f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$. 由$f'(x)=0$，得$x=\ln 2$，当$x<\ln 2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>\ln 2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；所以当$x=\ln 2$时，$f(x)$有极小值为$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-\ln 4$. $f(x)$无极大值；

(2)令$g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=0$时$x=0$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

或 $x=2$，$g(x)_{\max}=g(2)=\frac{4}{e^2}<1$，故 $x^2<e^x$；

(3)要证当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $\frac{x^2}{e^x}<c$. 即要证 $c>g(x)$ 对 $x\in(x_0,+\infty)$ 恒成立，易知 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)\downarrow$ 且 $g(x)_{\max}=\frac{4}{e^2}$，当 $c>\frac{4}{e^2}$ 时，显然 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立；当 $c\leqslant\frac{4}{e^2}$ 时，令 $x_0>2$，$x\to+\infty$ 时 $g(x)\to0$，即令 $c=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<c$，因此，当对任意给定的正数 c，总存在 x_0，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$.

7. 【解析】(1)因为函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$. 所以 $x>0$，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$，因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(2)=ae^2-\frac{1}{2}=0$，解得 $a=\frac{1}{2e^2}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$，所以 $f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增；

(2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，要证 $f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1\geqslant0$，只需 $\frac{\ln x+1}{e^x}\leqslant\frac{1}{e}$，设 $g(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^x}$，由 $g'(x)=0$，得 $x=1$，令 $h(x)=\frac{1}{x}-1-\ln x$，$h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的最大值点，故当 $x>0$ 时，$g(x)\leqslant g(1)=\frac{1}{e}$，所以当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant0$.

8. 【解析】因为 $f(x)=e^x-ax^2-bx-1$，所以 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax-b$，又 $g'(x)=e^x-2a$，$x\in[0,1]$，所以 $1\leqslant e^x\leqslant e$，所以，①当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，则 $2a\leqslant1$，$g'(x)=e^x-2a\geqslant0$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=g(0)=1-b$；

②当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$，则 $1<2a<e$，所以当 $0<x<\ln(2a)$ 时，$g'(x)=e^x-2a<0$，当 $\ln(2a)<x<1$ 时，$g'(x)=e^x-2a>0$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\ln(2a)]$ 上单调递减，在区间 $[\ln(2a),1]$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=g[\ln(2a)]=2a-2a\ln(2a)-b$；

③当 $a\geqslant\frac{e}{2}$ 时，则 $2a\geqslant e$，$g'(x)=e^x-2a\leqslant0$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，$g(x)_{\min}=g(1)=e-2a-b$，综上：函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 $g_{\min}(x)$

$$=\begin{cases}1-b\left(a\leqslant\frac{1}{2}\right)\\2a-2a\ln(2a)-b\left(\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}\right);\\e-2a-b\left(a\geqslant\frac{e}{2}\right)\end{cases}$$

(2)由 $f(1)=0$，$\Rightarrow e-a-b-1=0\Rightarrow b=e-a-1$，又 $f(0)=0$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有零点，则函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有三个单调区间，由(1)知当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant\frac{e}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调，不可能满足“函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有三个单调区间”这一要求. 当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，构造函数 $h(x)=\frac{ax^2+(e-a-1)x+1}{e^x}=1$ 在区间 $(0,1)$ 内有解，由于 $h(0)=h(1)=1$，即 $h'(x)=\frac{2ax+(e-a-1)-ax^2-(e-a-1)x-1}{e^x}=0$ 在区

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

间(0，1)内有两解，故$\begin{cases}h(0)<0\\h(1)<0\\0<\dfrac{3a-e+1}{2a}<1\\\triangle>0\end{cases}$

解得：$e-2<a<1$.

专题4　破解洛必达(L'Hopital)法则之隐零点护航法

达标训练

1. 【解析】根据不等式$\ln(x+1)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$，即可得$(x+1)\ln(x+1)\geqslant x$，故当$a\leqslant1$时，不等式恒成立，当仅当$x=0$时等号成立.

2. 【解析】(1)由$f(x)$得$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，即$f'(x)\geqslant0$，当且仅当$e^x=e^{-x}$即$x=0$时，$f'(x)=0$，所以函数$f(x)$在**R**上为增函数；

(2)分离变量得$4b<\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{e^x-e^{-x}-2x}$，可知当$x\to0$时，属于$\dfrac{0}{0}$类型，故可以用洛必达法则，$4b<\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{e^x-e^{-x}-2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4}{e^x+e^{-x}-2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4e^{2x}-4e^{-2x}}{e^x-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8e^{2x}+8e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}=8$，故$b<2$，由于$x\neq0$，故$b\leqslant2$，$b$的最大值为2；

(3)因为$1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，根据(Ⅱ)中$g(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4b(e^x-e^{-x})+(8b-4)x$，为了凑配$\ln2$，并利用$\sqrt{2}$的近似值，故将$\ln\sqrt{2}$即$\dfrac{1}{2}\ln2$代入$g(x)$的解析式中，得$g(\ln\sqrt{2})=\dfrac{3}{2}-2\sqrt{2}b+2(2b-1)\cdot\ln2$. 当$b=2$时，由$g(x)>0$，得$g(\ln2)=\dfrac{3}{2}-4\sqrt{2}+6\ln2>0$，从而$\ln2>\dfrac{8\sqrt{2}-3}{12}>\dfrac{8\times1.4142-3}{12}=0.6928$；所以$\ln2$的近似值为0.693.

3. 【解析】(1)由题意，$f'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-1}{x}$，$x>0$，①当$a\leqslant0$时，$2ax^2-1\leqslant0$，$f'(x)\leqslant0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；②当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{2a\left(x+\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)}{x}$，当$x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$时，$f'(x)<0$，当$x\in\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递增；

(2)原不等式等价于$f(x)-\dfrac{1}{x}+e^{1-x}>0$在$x\in(1,+\infty)$上恒成立，一方面，令$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}+e^{1-x}=ax^2-\ln x-\dfrac{1}{x}+e^{1-x}-a$，只需$g(x)$在$x\in(1,+\infty)$上恒大于0即可，又因为$g(1)=0$，故$g'(x)$在$x=1$处必大于等于0. 令$F(x)=g'(x)=2ax-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-e^{1-x}$，$g'(1)\geqslant0$，可得$a\geqslant\dfrac{1}{2}$. 另一方面，当$a\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$F'(x)=2a+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}+e^{1-x}\geqslant1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}+e^{1-x}=\dfrac{x^3+x-2}{x^3}+e^{1-x}$，因为$x\in(1,+\infty)$，故$x^3+x-2>0$，又$e^{1-x}>0$，故$F'(x)$在$a\geqslant\dfrac{1}{2}$时恒大于0. 所以当$a\geqslant\dfrac{1}{2}$时，$F(x)$在$x\in(1,+\infty)$单调递增. 所以$F(x)>F(1)=2a-1\geqslant0$，故$g(x)$也在$x\in(1,+\infty)$单调递增. 所以$g(x)>g(1)=0$，即$g(x)$在$x\in(1,+\infty)$上恒大于0.

综上，$a\geqslant\dfrac{1}{2}$.

4. 【解析】(1)只需$\dfrac{1-x}{1+x}\leqslant\dfrac{1}{e^{2x}}\leqslant\dfrac{1}{(1+x)^2}$，根据不等

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

式 $e^x \geqslant 1+x$，可得 $\frac{1}{e^{2x}} \leqslant \frac{1}{(1+x)^2}$，令 $F(x)=e^{2x}(1-x)-(1+x)$，$F(0)=0$，$F'(x)=e^{2x}(1-2x)-1$，$F'(0)=0$，$F''(x)=-4xe^{2x} \leqslant 0$，故 $F'(x) \leqslant 0$，$F(x)=e^{2x}(1-x)-(1+x) \leqslant 0$ 命题即可得证；

(2) $a \leqslant \frac{1-x-\frac{x^3}{2}-1-2x\cos x}{x} \leqslant \frac{(1+x)e^{-2x}-\frac{x^3}{2}-1-2x\cos x}{x}$，当 $x \to 0$ 时，属于 $\frac{0}{0}$ 类型，可以用洛必达法则，$a < \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)e^{-2x}-\frac{x^3}{2}-1-2x\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2(1+x)e^{-2x}+e^{-2x}-\frac{3}{2}x^2-2\cos x+2x\sin x}{1}$

$=-3$，由于 $x \neq 0$，故 $a \leqslant -3$.

(1)证明：①当 $x \in [0,1)$ 时，$(1+x)e^{-2x} \geqslant 1-x \Leftrightarrow (1+x)e^{-x} \geqslant (1-x)e^{x}$，令 $h(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}$，则 $h'(x)=x(e^{x}-e^{-x})$. 当 $x \in [0,1)$ 时，$h'(x) \geqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $[0,1)$ 上是增函数，所以 $h(x) \geqslant h(0)=0$，即 $f(x) \geqslant 1-x$；

②当 $x \in [0,1)$ 时，$f(x) \leqslant \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow e^{x} \geqslant 1+x$，令 $u(x)=e^{x}-1-x$，则 $u'(x)=e^{x}-1$. 当 $x \in [0,1)$ 时，$u'(x) \geqslant 0$，所以 $u(x)$ 在 $[0,1)$ 单调递增，所以 $u(x) \geqslant u(0)=0$，所以 $f(x) \leqslant \frac{1}{1+x}$.

综上可知：$1-x \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x}$. 设 $G(x)=f(x)-g(x)=(1+x)e^{-2x}-\left(ax+\frac{1}{2}x^3+1+2x\cos x\right) \geqslant 1-x-ax-1-\frac{1}{2}x^3-2x\cos x=-x\left(a+1+\frac{x^2}{2}+2\cos x\right)$.

令 $H(x)=\frac{x^2}{2}+2\cos x$，则 $H'(x)=x-2\sin x$，令 $K(x)=x-2\sin x$，则 $K'(x)=1-2\cos x$. 当 $x \in [0,1)$ 时，$K'(x)<0$，可得 $H'(x)$ 是 $[0,1)$ 上的减函数，所以 $H'(x) \leqslant H'(0)=0$，故 $H(x)$ 在 $[0,1)$ 单调递减，所以 $H(x) \leqslant H(0)=2$. 所以 $a+1+H(x) \leqslant a+3$. 所以当 $a \leqslant -3$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$ 在 $[0,1)$ 上恒成立. 下面证明当 $a>-3$ 时，$f(x) \leqslant g(x)$ 在 $[0,1)$ 上不恒成立.

$f(x)-g(x) \leqslant \frac{1}{1+x}-\left(1+ax+\frac{1}{2}x^3+2x\cos x\right)=\frac{-x}{1+x}-ax-\frac{x^3}{2}-2x\cos x=-x\left(\frac{1}{1+x}+a+\frac{x^2}{2}+2\cos x\right)$.

令 $v(x)=\frac{1}{1+x}+a+\frac{x^2}{2}+2\cos x=\frac{1}{1+x}+a+H(x)$，则 $v'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+H'(x)$.

当 $x \in [0,1)$ 时，$v'(x) \leqslant 0$，故 $v(x)$ 在 $[0,1)$ 上是减函数，所以 $v(x) \in (a+1+2\cos 1, a+3]$；

当 $a>-3$ 时，$a+3>0$. 所以存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $v(x_0)>0$，此时，$f(x_0)<g(x_0)$.

即 $f(x) \geqslant g(x)$ 在 $[0,1)$ 不恒成立. 综上实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

5. 【解析】(1)函数的定义域为 $(-a,+\infty)$，求导可得 $f'(x)=\frac{x+a-1}{x+a}$ 令 $f'(x)=0$，可得 $x=1-a>-a$，令 $f'(x)>0$，$x>-a$ 可得 $x>1-a$；令 $f'(x)<0$，$x>-a$ 可得 $-a<x<1-a$ 所以 $x=1-a$ 时，函数取得极小值且为最小值因为函数 $f(x)=x-\ln(x+a)$ 的最小值为 0，所以 $f(1-a)=1-a-0$，解得 $a=1$；

(2) $k \geqslant \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$，$x \to 0$ 时，属于 $\frac{0}{0}$ 类型，故可用洛必达法则，$k \geqslant \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}$；

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

(3)当 $n=1$ 时，不等式左边 $=2-\ln 3<2=$ 右边，不等式成立；当 $n\geqslant 2$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{2}{2i-1}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)$，在(2)中，取 $k=\frac{1}{2}$，得 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}x^2$，从而可得 $f\left(\frac{2}{2i-1}\right)\leqslant\frac{2}{(2i-1)^2}<\frac{2}{(2i-3)\cdot(2i-1)}$，由此可证结论.

6. 【解析】(1) $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x(e^x-1)-\frac{1}{2}x^2$，$f'(x)=e^x-1+x\cdot e^x-x=(e^x-1)\cdot(x+1)$，令 $f'(x)>0$，可得 $x<-1$ 或 $x>0$；令 $f'(x)<0$，可得 $-1<x<0$；所以函数的单调增区间是 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$；单调减区间为 $(-1,0)$；

(2) $f(x)=x(e^x-1-ax)$. 令 $g(x)=e^x-1-ax$，则 $g'(x)=e^x-a$. ①若 $a\leqslant 1$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 为增函数，而 $g(0)=0$，从而当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 0$. ②若 $a>1$，则当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，而 $g(0)=0$，从而当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$g(x)<0$，即 $f(x)<0$. 综合得 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

7. 【解析】(1) $f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$，则有 $\begin{cases}f(1)=a+b+c=0\\f'(1)=a-b=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=a-1\\c=1-2a\end{cases}$；

(2)由(1)知，$f(x)=ax+\frac{a-1}{x}+1-2a$，$f(x)\geqslant\ln x\Rightarrow a\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\geqslant\ln x+\frac{1}{x}-1\Rightarrow a\geqslant\frac{\ln x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}-2}$ 对 $x\in[1,+\infty)$，当 $x\to 1$ 时，属于 $\frac{0}{0}$ 型，利用洛必达法则 $a\geqslant\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x^3}}=\frac{1}{2}$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立.

8. 【解析】(1)函数的定义域为 $(-1,+\infty)$，函数的导数 $f'(x)=\frac{a}{x+1}-\frac{1-x}{e^x}$，若 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极值，则 $f'(1)=0$，即 $f'(1)=\frac{a}{2}-\frac{1-1}{e}=\frac{a}{2}=0$ 得 $a=0$，此时 $f'(x)=-\frac{1-x}{e^x}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，当 $x>-1$ 时，$f'(x)$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$，递增区间为 $(1,+\infty)$；

(2)因为 $f(0)=0$，$f'(x)=\frac{a}{x+1}-\frac{1-x}{e^x}=\frac{ae^x+x^2-1}{(x+1)e^x}$，记 $h(x)=ae^x+x^2-1$，则 $h(0)=a-1$，且 $h'(x)=ae^x+2x$，当 $h(0)=a-1\geqslant 0$，即 $a\geqslant 1$ 时，$h'(x)=ae^x+2x>0$，$(x>0)$，$h(x)=ae^x+x^2-1$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $x>0$ 时，$h(x)>h(0)=a-1\geqslant 0$，则 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)\geqslant f(0)=0$，符合. 当 $h(0)=a-1<0$，即 $a<1$ 时，则存在 $m>0$ 使得 $x\in(0,m)$ 时，$h(x)<0$，此时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,m)$ 上单调递减，当 $0<x<m$ 时，$f(x)<f(0)=0$，不符合，综上实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

9. 【解析】(1)由题意知，$f'(x)=-\frac{a}{x}-\frac{xe^x-e^x}{x^2}+a=\frac{(ax-e^x)(x-1)}{x^2}(x>0)$. 因为当 $a<0$ 时，$ax-e^x<0$. 所以当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

(2)由题意，当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)+\left(bx-b+\frac{1}{x}\right)e^x-x\geqslant 0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时恒成

获取更多资料加qq群698274639

立等价于 $\ln x-b(x-1)e^x\leqslant 0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时恒成立，$b\geqslant\dfrac{\ln x}{(x-1)e^x}\Rightarrow b\geqslant\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{(x-1)e^x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{xe^x}=\dfrac{1}{e}$，隐零点护航法，令 $h(x)=\ln x-b(x-1)e^x$，可知，当 $b\leqslant 0$ 时，$h(x)>0$，不合题意；当 $b>0$ 时，得 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-bxe^x$，$h'(1)=1-be$；

①当 $b\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$h'(1)=1-be\leqslant 0$，又 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-bxe^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，则 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(1)=0$，所以 $h(x)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立；②当 $0<b<\dfrac{1}{e}$ 时，$h'(1)=1-be>0$，$h'\left(\dfrac{1}{b}\right)=b-e^{\frac{1}{b}}<0$，又 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-bxe^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以存在唯一 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $h'(x)=0$，所以当 $x\in(1,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $h(1)=0$，所以 $h(x)>0$ 在 $(1,x_0)$ 上成立，不合题意. 综上，实数 b 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

10. 【解析】(1)由已知 $g_1(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$g_2(x)=g(g_1(x))=\dfrac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\dfrac{x}{1+2x}$，$g_3(x)=\dfrac{x}{1+3x}\cdots$

可得 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+nx}$，用数学归纳法加以证明；

(2)利用不等式 $\ln(x+1)\geqslant\dfrac{x}{x+1}$，可知 $a\leqslant 1$.

由已知得到 $\ln(x+1)\geqslant\dfrac{ax}{x+1}$ 恒成立构造函数 $\varphi(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+1}(x\geqslant 0)$，利用导数求出函数的最小值即可；

(3)在(2)中取 $a=1$，可得 $\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$，$x>0$，令 $x=\dfrac{1}{n}$ 则 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，$x>0$，$n$ 依次取 1，2，3…，然后各式相加即得到不等式.

11. 【解析】(1)由题意，$f'(x)=(2ax+1)e^{-x}-(ax^2+x+a)e^{-x}=-e^{-x}[ax^2+(1-2a)x+a-1]=-e^{-x}(x-1)(ax+1-a)$.

(ⅰ)当 $a=0$ 时，$f'(x)=-e^{-x}(x-1)$，令 $f'(x)>0$，得 $x<1$；$f'(x)<0$，得 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，$(1,+\infty)$ 单调递减；

(ⅱ)当 $a>0$ 时，$1-\dfrac{1}{a}<1$，令 $f'(x)>0$，得 $1-\dfrac{1}{a}<x<1$；$f'(x)<0$，得 $x<1-\dfrac{1}{a}$ 或 $x>1$，所以 $f(x)$ 在 $\left(1-\dfrac{1}{a},1\right)$ 单调递增，$\left(-\infty,1-\dfrac{1}{a}\right)$，$(1,+\infty)$ 单调递减；

(2)此题涉及参变转移，此时 a 是变量，x 是参数，求出 $g(a)$ 的最大值，等价于 $b\ln(x+1)\geqslant g(a)_{\max}=g(0)$，即 $xe^{-x}\leqslant b\ln(x+1)$，对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，此时满足洛必达 $b\geqslant\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x\ln(x+1)}=1$. 过程如下：

令 $g(a)=e^{-x}(x^2+1)a+xe^{-x}$，$a\in(-\infty,0]$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^{-x}(x^2+1)\geqslant 0$，$g(a)$ 单调递增，则 $g(a)_{\max}=g(0)=xe^{-x}$，则 $g(a)\leqslant b\ln(x+1)$ 对 $\forall a\in(-\infty,0]$ 恒成立等价于 $b\ln(x+1)\geqslant g(a)_{\max}=g(0)$，即 $xe^{-x}\leqslant b\ln(x+1)$，对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

(ⅰ)当$b\leqslant 0$时，$\forall x\in(0,+\infty)$，$b\ln(x+1)<0$，$xe^{-x}>0$，此时$xe^{-x}>b\ln(x+1)$，不合题意，舍去；

(ⅱ)当$b>0$时，令$h(x)=b\ln(x+1)-xe^{-x}$，$h(0)=0$，$x\in[0,+\infty)$，则$h'(x)=\frac{b}{x+1}-(e^{-x}-xe^{-x})=\frac{be^{x}+x^{2}-1}{(x+1)e^{x}}$，其中$(x+1)e^{x}>0$，$\forall x\in[0,+\infty)$，令$p(x)=be^{x}+x^{2}-1$，$x\in[0,+\infty)$，则$p(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增.

①当$b\geqslant 1$时，$p(x)\geqslant p(0)=b-1\geqslant 0$，所以对$\forall x\in[0,+\infty)$，$h'(x)\geqslant 0$，则$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，故对任意$x\in[0,+\infty)$，$h(x)\geqslant h(0)=0$，即不等式$b\ln(x+1)\geqslant xe^{-x}$在$[0,+\infty)$上恒成立，满足题意；

②当$0<b<1$时，由$p(0)=b-1<0$，$p(1)=be>0$及$p(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，所以存在唯一的$x_0\in(0,1)$使得$p(x_0)=0$，且$x\in(0,x_0)$时，$p(x_0)<0$. 从而$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，所以$h(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递减，则$x\in(0,x_0)$时，$h(x)<h(0)=0$，即$b\ln(x+1)<xe^{-x}$，不符合题意. 综上所述，$b\geqslant 1$.

12. 【解析】(1)因为$f(x)=e^{x+m}-x^{3}$，所以$f'(x)=e^{x+m}-3x^{2}$. 因为曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线斜率为1，所以$f'(0)=e^{m}=1$，解得$m=0$；

(2)因为$f(x)=e^{x+m}-x^{3}$，$g(x)=\ln(x+1)+2$，所以$f(x)>g(x)-x^{3}$等价于$e^{x+m}-\ln(x+1)-2>0$. 根据不等式$e^{x+m}\geqslant e^{x+1}\geqslant x+1+1$，即证$x-\ln(x+1)>0$.

13. 【解析】(1)解：当$a=-1$时，$f(x)=e^{-x}+x$，则$f'(x)=-\frac{1}{e^{x}}+1$. 令$f'(x)=0$，得$x=0$. 当$x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$. 所以函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增. 所以当$x=0$时，函数$f(x)$取得最小值，其值为$f(0)=1$；

(2)若$x\geqslant 0$时，$f(-x)+\ln(x+1)\geqslant 1$，即$e^{x}+ax+\ln(x+1)-1\geqslant 0$. $a\geqslant\frac{1-\ln(1+x)-e^{x}}{x}$，利用洛必达法则求出实数$a$的取值范围是$[-2,+\infty)$；

(3)由(2)知，当$a=-2$时，$g(x)=e^{x}-2x+\ln(x+1)-1$在$[0,+\infty)$上单调递增，则$g\left(\frac{1}{2}\right)>g(0)$，即$e^{\frac{1}{2}}-1+\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)-1>0$.

所以$\ln\frac{3}{2}>2-\sqrt{e}$. 所以$\frac{3}{2}>e^{2-\sqrt{e}}$，即$e^{2-\sqrt{e}}<\frac{3}{2}$.

14. 【解析】(1)$b=1$；

(2)分离变量可得：$a\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}=\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$，先令$F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$，$F'(x)=-\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{\ln^{2}(1+x)}$，根据不等式$\ln(1+x)>x$，故$F'(x)>0$对$x\in[0,1]$恒成立，$F(x)$为单调增函数，故只需证明$a\leqslant F(0)$即可，当$x\to 0$时，$F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$属于$\frac{0}{0}$类型，用洛必达法则$a\leqslant\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^{2}}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{2}$；

(3)要证$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，故只需

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

证 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，只需证 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，只需证 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，令 $x=\frac{1}{n}$，则 $x\in(0,1]$，构造函数 $\frac{x}{x+1}<\ln x<x$ 即可.

专题5　利用零点比大小破解参数取值范围

达标训练

1. C 【解析】解法一：由曲线 $f(x)=\ln x-1$ 得 $x>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，因为直线 $y=ax+b$ 与曲线 $f(x)=\ln x-1$ 相切，所以 $a=\frac{1}{x}(a>0)$，则切点的横坐标为 $x=\frac{1}{a}$所以联立两解析式得 $a\cdot\frac{1}{a}+b=\ln\frac{1}{a}-1$，即 $1+b=-\ln a-1$，整理得 $\ln a+b=-2(a>0)$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{-2-\ln a}{a}$，令 $g(x)=\frac{-2-\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x-(-2-\ln x)}{x^2}=\frac{1+\ln x}{x^2}$，①当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；②当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；所以 $x=\frac{1}{e}$时，$g(x)$取得极小值也是最小值，$g\left(\frac{1}{e}\right)=-e$，所以$\frac{b}{a}$的最小值为 $-e$. 故选 C.

解法二：设 $y=ax+b$ 的零点为 $x_1=-\frac{b}{a}$，$f(x)=\ln x-1$ 的零点为 $x_2=e$，由零点比大小的模型，可知 $x_1\leqslant x_2$，所以$\frac{b}{a}\geqslant-e$.

2. A 【解析】解法一：设切点为(m,n)，由 $f(x)=x-e^{-x}$的导数为$f'(x)=1+e^{-x}$，可得切线的斜率为$k=1+e^{-m}$，$km+b=m-e^{-m}$，即有 $k+b=1-me^{-m}$，由 $g(m)=1-me^{-m}$的导数为 $g'(m)=(m-1)e^{-m}$，即有 $m>1$ 时 $g(m)$递增，$m<1$ 时，$g(m)$递减，即 $m=1$ 处 $g(m)$取得最小值，且为 $1-\frac{1}{e}$，显然$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{e}$，故选 A.

解法二：$k+b$ 为 $y=kx+b$ 在 $x=1$ 处的取值，所以需要构造 $x=1$ 处的零点. 令 $g(x)=x-e^{-x}+m$，由 $g(1)=0$ 可知，$m=\frac{1}{e}-1$，作 $g(x)=x-e^{-x}+m$ 和 $y=kx+b+\frac{1}{e}-1$ 的图像，可知 $x_1=1=x_2$ 时相切，此时 $k+b$ 取最小值 $1-\frac{1}{e}$，显然$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{e}$，所以选 A

3. C 【解析】解法一：设切点是 $P(t,f(t))$，由 $f'(x)=1+e^{-x}$，P 是切线斜率 $k=f'(t)=1+e^{-t}$，所以 P 切线方程为 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$，整理得 $y=(1+e^{-t})x-(t+1)e^{-t}$，所以 $m+n=(1+e^{-t})-(t+1)e^{-t}=1-\frac{t}{e^t}$，记 $g(t)=1-\frac{t}{e^t}$，所以 $g'(t)=\frac{t-1}{e^t}$，当 $t<1$，$g'(t)<0$，$g(t)$递减；当 $t>1$，$g'(t)>0$，$g(t)$递减；故 $g(t)_{\min}=g(1)=1-\frac{1}{e}$，即 $m+n$ 的最小值是 $1-\frac{1}{e}$，故选 C.

解法二：$m+n$ 为 $y=mx+n$ 在 $x=1$ 处的取值，所以需要构造 $x=1$ 处的零点. 令 $g(x)=x-e^{-x}+t$，由 $g(1)=0$ 可知，$t=\frac{1}{e}-1$，作 $g(x)=x-e^{-x}+t$ 和 $y=kx+b+\frac{1}{e}-1$ 的图像，可知 $x_1=1=x_2$ 时相切，此时 $m+n$ 取最小值 $1-\frac{1}{e}$，故选 C

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

4. D 【解析】解法一：令 $f(x)=e^x-ax-b$，则 $f'(x)=e^x-a$，若 $a<0$，则 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，不可能恒有 $f(x)\geqslant 0$；若 $a>0$，由 $f'(x)=e^x-a=0$ 得，极小值点 $x=\ln a$，由 $f(\ln a)=a-a\ln a-b\geqslant 0$ 得，$b\leqslant a(1-\ln a)$，则 $\frac{b-2}{a}\leqslant\frac{a(1-\ln a)-2}{a}=1-\ln a-\frac{2}{a}$，令 $g(a)=1-\ln a-\frac{2}{a}$，$(a>0)$，则 $g'(a)=-\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}=\frac{2-a}{a^2}$，则当 $0<a<2$ 时，$g'(a)>0$，当 $a>2$ 时，$g'(a)<0$，则当 $a=2$ 时，$g(a)$ 取得极大值，而 $g(2)=1-\ln 2-\frac{2}{2}=-\ln 2$，所以 $\frac{b-2}{a}$ 的最大值为 $-\ln 2$，故选 D.

解法二：由题意可知，$e^x-2\geqslant ax+b-2$，作 $f(x)=e^x-2$ 和 $y=ax+b-2$ 的图像，$f(x)$ 的零点为 $x_1=\ln 2$，$y=ax+b-2$ 的零点为 $x_2=-\frac{b-2}{a}$，由零点比大小模型可知 $x_2\geqslant x_1$，所以 $\frac{b-2}{a}\leqslant-\ln 2$，故选 D.

5. D 【解析】解法一：令 $f(x)=e^x-4x+2-ax-b$，则 $f'(x)=e^x-(a+4)$，若 $a+4<0$，则 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，不可能恒有 $f(x)\geqslant 0$；若 $a+4>0$，由 $f'(x)=e^x-(a+4)=0$ 得，极小值点 $x=\ln(a+4)$，由 $f[\ln(a+4)]=a+4-(a+4)\ln(a+4)-b\geqslant 0$ 得，$b\leqslant(a+4)[1-\ln(a+4)]$，则 $\frac{b-4}{a+4}\leqslant\frac{(a+4)[1-\ln(a+4)]-4}{a+4}=1-\ln(a+4)-\frac{4}{a+4}$，令 $g(a)=1-\ln(a+4)-\frac{2}{a+4}$，$(a>-4)$，则 $g'(a)=-\frac{1}{a+4}+\frac{2}{(a+4)^2}=\frac{-a-2}{(a+4)^2}$，则当 $-4<a<-2$ 时，$g'(a)>0$，当 $a>-2$ 时，$g'(a)<0$，则当 $a=-2$ 时，$g(a)$ 取得极大值，而 $g(-2)=1-\ln 2-\frac{2}{2}=-\ln 2$，所以 $\frac{b-4}{a+4}$ 的最大值为 $-\ln 2$，故选 D.

解法二：由题意可变形为，$e^x-2\geqslant(a+4)x+b-4$，作 $f(x)=e^x-2$ 和 $y=(a+4)x+b-4$ 的图像，$f(x)$ 的零点为 $x_1=\ln 2$，$y=(a+4)x+b-4$ 的零点为 $x_2=-\frac{b-4}{a+4}$，由零点比大小模型可知 $x_2\geqslant x_1$，所以 $\frac{b-4}{a+4}\leqslant-\ln 2$.

6. C 【解析】解法一：设 $f(x)=e^x-\ln x$，则只考虑 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值，小于此值的最大整数 a 即为所求，则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，$f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f(1)=e-1>0$，$f(\frac{1}{2})=e^{0.5}-2<0$，所以 $\exists x_0$，$\frac{1}{2}<x_0<1$ 满足 $f'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，此时有 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$x_0=-\ln x_0$，因为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f'(x_0)=0$，所以 $0<x<x_0$ 时 $f'(x)<0$，$x>x_0$ 时 $f'(x)>0$，所以 $0<x<x_0$ 时 $f(x)$ 单调递减，$x>x_0$ 时 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的极小值在 $x=x_0$ 处取到，也是最小值，$f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0\geqslant 2$，当且仅当 $\frac{1}{x_0}=x_0$ 即 $x_0=1$ 时取等号，因为 $\frac{1}{2}<x_0<1$，所以等号无法取到，所以 $f(x_0)>2$，所以 $f(x)$ 的最小值落在 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ 上，所以 $a<f(x)$，所以 $a\leqslant 2$，故整数 a 的最大取值为 2. 故选 C.

解法二：由题意可知，$e^x-a>\ln x$，令 $f(x)=e^x-a$，$g(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 的零点 $x_1=\ln a$，$g(x)$ 的零点为 $x_2=1$，由零点比大小模型可知 $\ln a<$

获取更多资料加qq群698274639

 获取更多资料加qq群698274639

1，则 $0<a<e$.

7. A 【解析】解法一：实数 $\lambda>0$，若对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，即为 $\left(e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\right)_{\min}\geqslant 0$，设 $f(x)=e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}$，$x>0$，$f'(x)=\lambda e^{\lambda x}-\frac{1}{\lambda x}$，令 $f'(x)=0$，可得 $e^{\lambda x}=\frac{1}{\lambda^2 x}$，由指数函数和反函数在第一象限的图像，可得 $y=e^{\lambda x}$ 和 $y=\frac{1}{\lambda^2 x}$ 有且只有一个交点，设为 (m,n)，当 $x>m$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $0<x<m$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减. 即有 $f(x)$ 在 $x=m$ 处取得极小值，且为最小值. 即有 $e^{\lambda m}=\frac{1}{\lambda^2 m}$，令 $e^{\lambda m}-\frac{\ln m}{\lambda}=0$，可得 $m=e$，$\lambda=\frac{1}{e}$. 则当 $\lambda\geqslant\frac{1}{e}$ 时，不等式 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立. 则 λ 的最小值为 $\frac{1}{e}$.

解法二：由于 $y=e^{\lambda x}$ 与 $y=\frac{\ln x}{\lambda}$ 互为反函数，故图像关于 $y=x$ 对称，考虑极限情况，$y=x$ 恰为这两个函数的公切线，此时斜率 $k=1$，再用导数求得切线斜率的表达式为 $k=\frac{1}{\lambda e}$，即可得 λ 的最小值为 $\frac{1}{e}$. 故选 A.

解法三：参考例 11(法一)

8. A 【解析】解法一：由 $f(x)=0$ 得 $a^x=\log_a x$，设函数 $f(x)=a^x$ 与 $g(x)=\log_a x$，则两个函数关于 $y=x$ 对称，只需要讨论与 $y=x$ 有两个解即可，令 $h(x)=a^x-x$，则函数 $h(x)$ 有两个零点，当 $0<a<1$ 时，函数 $h(x)$ 为减函数，至多有一个零点，不满足要求，当 $a>1$ 时，令 $h'(x)=a^x\ln a-1=0$，则 $x=\log_a\frac{1}{\ln a}$，当 $0<x<\log_a\frac{1}{\ln a}$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 为减函数；当 $x>\log_a\frac{1}{\ln a}$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 为增函数；故当 $x=\log_a\frac{1}{\ln a}$ 时，函数 $h(x)$ 取最小值，若函数 $h(x)$ 有两个零点，则 $h\left(\log_a\frac{1}{\ln a}\right)<0$，即 $a^{\log_a\frac{1}{\ln a}}<\log_a\frac{1}{\ln a}$，即 $\frac{1}{\ln a}=\log_a e<\log_a\frac{1}{\ln a}$，即 $e<\frac{1}{\ln a}$，即 $0<\ln a<\frac{1}{e}$，即 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$，故实数 a 的取值范围是 $(1,e^{\frac{1}{e}})$，故选 A.

解法二：参考例 12(法一)

9. D 【解析】解法一：由题意可知，$a(3x-2)\leqslant 6x^2\cdot e^x$，当 $3x-2>0$ 时，即 $x>\frac{2}{3}$ 时，$a\leqslant\frac{6x^2\cdot e^x}{3x-2}$，设 $g(x)=\frac{6x^2\cdot e^x}{3x-2}$，$x>\frac{2}{3}$，$g'(x)=6\times\frac{(2xe^x+x^2e^x)(3x-2)-3x^2e^x}{(3x-2)^2}=6\times\frac{xe^x(3x^2+x-4)}{(3x-2)^2}$ $=6xe^x\times\frac{(3x+4)(x-1)}{(3x-2)^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=1$，所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=6e$，所以 $a\leqslant 6e$；当 $3x-2<0$ 时，即 $x<\frac{2}{3}$ 时，$a\geqslant\frac{6x^2\cdot e^x}{3x-2}$，由 $g'(x)=6xe^x\times\frac{(3x+4)(x-1)}{(3x-2)^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=-\frac{4}{3}$ 或 $x=0$，所以函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$ 和 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{4}{3},0\right)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\max}=g(0)=0$，所以 $a\geqslant 0$，当 $x=\frac{2}{3}$ 时，$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}e^{\frac{2}{3}}>0$ 恒成立，综上所述 a 的取值范围是 $[0,6e]$，故最大值为 $6e$，故选 D

解法二：由题意可知，$6x^2e^x\geqslant 3ax-2a$，所以 $6e^x\geqslant\frac{3ax-2a}{x^2}$，两边同时取对数，可得 $\ln 6+x\geqslant$

 获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\ln a+\ln\frac{3x-2}{x^2}$，即 $\ln\frac{6}{a}+x\geqslant\ln\frac{3x-2}{x^2}$，令 $y=\ln\frac{6}{a}+x$，其零点为 $x_1=\ln\frac{a}{6}$，$f(x)=\ln\frac{3x-2}{x^2}$，其零点为 $x_2=1$，由零点比大小模型 $x_1\leqslant x_2$，所以 $a\leqslant 6e$，故最大值为 $6e$，故选 D.

10. D 【解析】解法一：因为函数 $f(x)=\ln x+(2e^2-a)x-\frac{b}{2}$，其中 e 为自然对数的底数，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+(2e^2-a)$，$x>0$，①当 $a\leqslant 2e^2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，所以 $f(x)\leqslant 0$ 不可能恒成立；②当 $a>2e^2$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a-2e^2}$，因为不等式 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的最大值为 0，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a-2e^2}\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x\in\left(\frac{1}{a-2e^2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以当 $x=\frac{1}{a-2e^2}$ 时，$f(x)$ 取最大值，$f\left(\frac{2}{a-2e^2}\right)=-\ln(a-2e^2)-\frac{1}{2}b-1\leqslant 0$，所以 $\ln(a-2e^2)+\frac{1}{2}b+1\geqslant 0$，所以 $\frac{1}{2}b\geqslant -1-\ln(a-2e^2)$，因为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\geqslant\frac{-1-\ln(a-2e^2)}{a}$ $(a>2e^2)$，令 $F(x)=\frac{-1-\ln(x-2e^2)}{x}$ $(x>2e^2)$，$F'(x)=\frac{-\frac{x}{x-2e^2}+1+\ln(x-2e^2)}{x^2}=\frac{(x-2e^2)\ln(x-2e^2)-2e^2}{(x-2e^2)x^2}$，令 $H(x)=(x-2e^2)\ln(x-2e^2)-2e^2$，$H'(x)=\ln(x-2e^2)+1$，由 $H'(x)=0$，得 $x=2e^2+\frac{1}{e}$，当 $x\in\left(2e^2+\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$H'(x)>0$，$H(x)$是增函数，当 $x\in\left(2e^2,2e^2+\frac{1}{e}\right)$时，$H'(x)<0$，$H(x)$是减函数，所以当 $x=2e^2+\frac{1}{e}$时，$H(x)$取最小值，$H\left(2e^2+\frac{1}{e}\right)=-2e^2-\frac{1}{e}$，因为 $x\to 2e^2$ 时，$H(x)>0$，$x>3e^2$ 时，$H(3e^2)=0$，所以当 $x\in(2e^2,3e^2)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$是减函数，当 $x\in(3e^2,+\infty)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$是赠函数，所以 $x=3e^2$ 时，$F(x)$取最小值.

$F(3e^2)=\frac{-1-2}{3e^2}=-\frac{1}{e^2}$，所以 $\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$的最小值为 $-\frac{1}{e^2}$，即有 $\frac{b}{a}$的最小值为 $-\frac{2}{e^2}$. 故选 B.

解法二：由题意可知 $\ln x+2e^2x\leqslant ax+\frac{b}{2}$，令 $g(x)=\ln x+2e^2x$，其零点为 $x_1=\frac{1}{e^2}$，令 $y=ax+\frac{b}{2}$，其零点为 $x_2=-\frac{b}{2a}$，由零点比大小模型可知 $x_2\leqslant x_1$，即 $\frac{b}{2a}\geqslant-\frac{1}{e^2}$，所以 $\frac{b}{a}\geqslant-\frac{2}{e^2}$，故选 B.

11. A 【解析】解法一：因为 $\log_2x-k\cdot 2^{kx}\geqslant 0\Rightarrow\log_2x\geqslant k\cdot 2^{kx}$ $x\log_2x\geqslant kx\cdot 2^{kx}\Rightarrow 2^{\log_2x}\log_2x\geqslant kx\cdot 2^{kx}$. 显然 $\log_2x>0\Rightarrow x>1$，令 $f(x)=x\cdot 2^x$，显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 所以 $f(\log_2x)\geqslant f(kx)\Rightarrow\log_2x\geqslant kx$ 所以 $k\leqslant\frac{\log_2x}{x}$因为存在正实数 x，使得不等式 $\log_2x-k\cdot 2^{kx}\geqslant 0$ 成立，故所以 $k\leqslant\left(\frac{\log_2x}{x}\right)_{\max}$，令 $g(x)=\frac{\log_2x}{x}=\frac{\ln x}{x\ln 2}$，$g'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1-1nx}{x^2}$，当 $1<x<e$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；故 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}\log_2e$，故选 A.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

解法二：由题意可知，$\log_2 x \geqslant k \cdot 2^{kx}$，所以 $\log_2(\log_2 x) \geqslant \log_2 k + kx$，则 $x_1 = 2$，$x_2 = -\frac{\log_2 k}{k}$，由零点比大小模型，存在 $k>0$ 使得 $x_2 \leqslant x_1$，即存在 $k>0$ 使得 $-\frac{\log_2 k}{k}<2$，所以 $k \leqslant \frac{1}{e}\log_2 e$，故选 A.

12. A 【解析】解法一：不等式 $e^{2\lambda x} - \frac{\ln x}{2\lambda} \geqslant 0$ 恒成立，故只需 $\forall x \in (0, +\infty)$，不等式 $2\lambda e^{2\lambda x} \geqslant \ln x$ 恒成立，即 $\ln 2\lambda + 2\lambda x \geqslant \ln(\ln x)$，所以 $x_1 = e$，$x_2 = -\frac{\ln 2\lambda}{2\lambda}$，由于函数为凸函数，根据零点比大小模型可知：$-\frac{\ln 2\lambda}{2\lambda} \leqslant e$，即 $\ln 2\lambda + 2e\lambda \geqslant 0$，由于 $f(\lambda) = 2e\lambda + \ln 2\lambda$ 为增函数，且 $f\left(\frac{1}{2e}\right) = 0$，所以 $\lambda \geqslant \frac{1}{2e}$，故选 A.

解法二：由于 $y = e^{2\lambda x}$ 与 $y = \frac{\ln x}{2\lambda}$ 互为反函数，故图像关于 $y = x$ 对称，根据 $a^x \geqslant \log_a x$ 恒成立条件可知 $a \geqslant e^{\frac{1}{e}}$，即 $e^{2\lambda} \geqslant e^{\frac{1}{e}}$ 可得 λ 的最小值为 $\frac{1}{2e}$，故选 A.

13. C 【解析】曲线 $y = e^x + x$ 的导数为 $y' = e^x + 1 > 1$，可知 $k>1$；直线：$l: y = kx + b$ 在 y 轴上的截距为 b，曲线 $y = e^x + x$，$x = 0$ 时，$y_{\min} = 1$，可知 $b \leqslant 1$，故选 C.

14. D 【解析】因为 $2ae^{2x} \geqslant \ln\frac{x}{a}$，所以 $\ln 2a + 2x \geqslant \ln\left(\ln\frac{x}{a}\right)$，$x_1 = -\frac{\ln 2a}{2}$，$x_2 = ae$，由零点比大小模型可知 $x_2 \geqslant x_1$，所以 $ae \geqslant -\frac{\ln 2a}{2}$，即 $e \geqslant -\frac{\ln 2a}{2a}$，所以 $2a \geqslant \frac{1}{e}$，$a \geqslant \frac{1}{2e}$，故选 D.

15. 【解析】因为函数 $f(x) = \ln x + (e-a)x - b$，其中 e 为自然对数的底数，所以 $f'(x) = \frac{1}{x} + e - a$，$x>0$，当 $a \leqslant e$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x) \leqslant 0$ 不可能恒成立；当 $a>e$ 时，由 $f'(x) = \frac{1}{x} + e - a = 0$，得，$x = \frac{1}{a-e}$，因为不等式 $f(x) \leqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的最大值为 0，当 $x \in \left(0, \frac{1}{a-e}\right)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x \in \left(\frac{1}{a-e}, +\infty\right)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 单调递减；所以当 $x = \frac{1}{a-e}$ 时，$f(x)$ 取最大值，$f\left(\frac{1}{a-e}\right) = -\ln(a-e) - b - 1 \leqslant 0$，所以 $\ln(a-e) + b + 1 \geqslant 0$，所以 $b \geqslant -1 - \ln(a-e)$，所以 $\frac{b}{a} \geqslant \frac{-1-\ln(a-e)}{a}(a>e)$，令 $F(x) = \frac{-1-\ln(x-e)}{x}$，$x>e$，$F'(x) = \frac{-\frac{1}{x-e}x + 1 + \ln(x-e)}{x^2}$ $= \frac{(x-e)\ln(x-e) - e}{(x-e)x^2}$，令 $H(x) = (x-e)\ln(x-e) - e$，$H'(x) = \ln(x-e) + 1$，由 $H'(x) = 0$，得 $x = e + \frac{1}{e}$，当 $x \in \left(e + \frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时，$H'(x) > 0$，$H(x)$ 是增函数；当 $x \in \left(e, e + \frac{1}{e}\right)$ 时，$H'(x) < 0$，$H(x)$ 是减函数；所以当 $x = e + \frac{1}{e}$ 时，$H(x)$ 取最小值，$H\left(e + \frac{1}{e}\right) = -e - \frac{1}{e}$，因为 $x \to e$ 时，$H(x) \to 0$，$x > 2e$ 时，$H(x) > 0$，$H(2e) = 0$，所以当 $x \in (e, 2e)$ 时，$F'(x) < 0$，$F(x)$ 是减函数；当 $x \in (2e, +\infty)$ 时，$F'(x) > 0$，$F(x)$ 是增函数；所以 $x = 2e$ 时，$F(x)$ 取最小值，$F(2e) = \frac{-1-1}{2e} = -\frac{1}{e}$，所以 $\frac{b}{a}$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$. 破

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

解解法：原式可化为 $\ln x + ex \leqslant ax + b$，则 $x_1 = \frac{1}{e}$，$x_2 = -\frac{b}{a}$，由零点比大小模型可得：$x_1 \geqslant x_2$，即 $\frac{1}{e} \geqslant -\frac{b}{a}$，所以 $\frac{b}{a} \leqslant -\frac{1}{e}$，故答案为 $-\frac{1}{e}$.

16. 【解析】解法一：因为 $k>0$，$b>0$，且 $kx+b \geqslant \ln(x+4)$，令 $f(x) = \ln(x+4) - kx - b$，则 $f'(x) = \frac{1}{x+4} - k$. 令 $f'(x) = 0$，得 $x = \frac{1}{k} - 4$，$x > -4$，所以 $f(x)_{max} = \ln\left(\frac{1}{k} - 4 + 4\right) - k\left(\frac{1}{k} - 4\right) - b$，即 $\ln\left(\frac{1}{k}\right) - (1 - 4k) - b = 0$，所以 $b = -\ln k - 1 + 4k$，所以 $\frac{b}{k} = \frac{4k - 1 - \ln k}{k} = 4 - \frac{1 + \ln k}{k}$，令 $g(k) = \frac{1 + \ln k}{k}$，则 $g'(k) = \frac{1 - \ln k}{k^2}(k>0)$，当 $0<k<1$ 时，$g'(k)>0$，$g(k)$ 单调递增，当 $k>1$ 时，$g'(k)<0$，$g(k)$ 单调递减，所以 $k=1$ 时，$g(k)$ 取最大值，$g(k)_{max} = 1$，所以 $\frac{b}{k} = 4 - \frac{1 + \ln k}{k}$ 的最小值为 $4 - 1 = 3$，即 $\frac{b}{k}$ 的最小值为 3.

解法二：由题意可知，$x_1 = -\frac{b}{k}$，$x_2 = -3$，由零点比大小模型可知 $x_1 \leqslant x_2$，即 $-\frac{b}{k} \leqslant -3$，所以 $\frac{b}{k} \geqslant 3$.

17. 【解析】解法一：令 $y = \ln(x+1) - ax - b - 1$，则 $y' = \frac{1}{x+1} - a$，若 $a \leqslant 0$，则 $y' > 0$ 恒成立，$x > -1$ 时函数递增，无最值. 若 $a>0$，由 $y' = 0$ 得：$x = \frac{1-a}{a}$，当 $-1 < x < \frac{1-a}{a}$ 时，$y'>0$，函数递增；当 $x > \frac{1-a}{a}$ 时，$y'<0$，函数递减. 则 $x = \frac{1-a}{a}$ 处取得极大值，也为最大值 $-\ln a + a - b - 2$，所以 $-\ln a + a - b - 2 \leqslant 0$，所以 $b \geqslant -\ln a + a - 2$，所以 $\frac{b}{a} \geqslant 1 - \frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a}$，令 $t = 1 - \frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a}$，所以 $t' = \frac{1 + \ln a}{a^2}$，所以 $(0, e^{-1})$ 上，$t'<0$，$(e^{-1}, +\infty)$ 上，$t'>0$，所以 $a = e^{-1}$，$t_{min} = 1 - e$. 所以 $\frac{b}{a}$ 的最小值为 $1 - e$.

解法二：由题意可知，$x_1 = e - 1$，$x_2 = -\frac{b}{a}$，由零点比大小模型可知 $x_1 \geqslant x_2$，即 $-\frac{b}{a} \leqslant e - 1$，所以 $\frac{b}{a} \geqslant 1 - e$.

18. 【解析】解法一：设切点 $P(x_0, \ln x_0)$，则 $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$，切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$，即 $y = \frac{1}{x_0}x + \ln x_0 - 1$，所以 $k = \frac{1}{x_0}$，$b = \ln x_0 - 1$，令 $g(x_0) = k + b = \frac{1}{x_0} + \ln x_0 - 1$ $(x_0 > 0)$，则 $g'(x_0) = \frac{x_0 - 1}{x_0^2}$，由 $g'(x_0) = 0$ 解得 $x_0 = 1$，$x_0 < 1$ 时，$g'(x_0) < 0$，$x_0 > 1$ 时，$g'(x_0) > 0$，故 $x_0 = 1$ 时，$g(x_0)$ 取最小值，此时 $g(1) = 0$，即 $k + b$ 的最小值为 0.

解法二：$k + b$ 是 $y = kx + b$ 在 $x = 1$ 处的值，所以设 $g(x) = \ln x + m$，由 $g(1) = 0$ 得，$m = 0$，所以 $k + b$ 取得最小值时，$y = kx + b + m$ 过 $(1, 0)$，所以 $(k + b)_{min} = 0$.

19. 【解析】在平面直角坐标系 xOy 中，分别作出 $y = \ln x$ 及 $y = a(x-2) + b$ 的图像，不等式 $\ln x \leqslant a(x-2) + b$ 对一切正实数 x 恒成立，即直线 $y = a(x-2) + b$ 恒在曲线 $y = \ln x$ 的上方. 由零点比大小原理，$a + b$ 最小时，直线 $y = a(x-2) + b$ 与 $x = 3$ 交点的纵坐标最小. 根据图像可

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

知：$a+b$ 的最小值为 ln3，此时直线 $y=a(x-2)+b$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切于点(3，ln3)，因此有：$a=\frac{1}{3}$，从而 $b=\ln 3-\frac{1}{3}$.

20. 【解析】$y=\ln(2x-1)$ 的零点 $x_1=1$，当 $a\geqslant 0$ 时，上式恒成立，当 $a<0$ 时，$y=x^2+a$ 的零点为 $x_2=\sqrt{-a}$，由零点比大小模型 $x_1\geqslant x_2$，解得 $-1\leqslant a<0$，综上，a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

21. 【解析】设切点为 (m,n)，$y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}$，一条切线为 $y=e(x-a)+b(a>0,b>0)$，则有 $\begin{cases}\frac{1}{m}=e\\ \ln m=e(m-a)+b\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{e}$，$b=-1-e\left(\frac{1}{e}-a\right)=-2+ea$，因为 $b>0$，所以 $a>\frac{2}{e}$. 则 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$，故答案为 $\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$.

22. 【解析】若 $a\leqslant 0$，显然 $f(x)$ 单调递增，且 $x\to 0$ 时，$f(x)<0$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点，满足题意；若 $a>0$，由 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$ 可知，当 $a=1$ 时，$y=1-\frac{1}{x}$ 与 $y=\ln x$ 相切，此时 $f(x)$ 仅有一个零点. 所以 a 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup\{1\}$.

23. 【解析】(1)因为函数 $f(x)$ 的图像与函数 $g(x)$ 的图像相切于 $x=\frac{1}{e}$ 处，所以 $\begin{cases}h\left(\frac{1}{e}\right)=g\left(\frac{1}{e}\right)\\ f'\left(\frac{1}{e}\right)=a-e\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{a}{e}+2b=0\\ e=a-e\end{cases}$，所以 $a=2e$，$b=-1$；

(2)令 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-(a-e)x+a-e$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+e-a$，当 $a\leqslant e$ 时，$h(x)$ 单调递增，而 $h(1)=0$，所以 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，不合题意；当 $a>e$ 时，令 $h'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{a-e}$，因为 $h'(x)$ 为减函数，所以 $x\in\left(0,\frac{1}{a-e}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，$x\in\left(\frac{1}{a-e},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{a-e}\right)=-\ln(a-e)-1-(e-a)\leqslant 0$，即 $\ln(a-e)\geqslant(a-e)-1$ (*). 但 $\forall x>0$，$\ln x\leqslant x-1$，等号成立当且仅当且 $x=1$. 故(*)式成立只能 $a=e+1$，即 $a=e+1$.

24. 【解析】(1)$\lambda=1$ 时，$g(x)=e^x-x$，$g'(x)=e^x-1$，令 $g'(x)<0$，解得：$x<0$，令 $g'(x)>0$，解得：$x>0$，故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递减，在 $(0,+\infty)$ 递增，故 $g(x)$ 无极大值，极小值是 $g(0)=1$；

(2)当 $0<x\leqslant 1$ 时，易知不等式 $e^{\lambda x}-\frac{\ln x}{\lambda}\geqslant 0$ 恒成立，$x>1$ 时，由题设得不等式 $\lambda e^{\lambda x}\geqslant\ln x$，即 $\lambda x e^{\lambda x}\geqslant\ln x\cdot e^{\ln x}$ (*)恒成立，设 $\varphi(t)=te^t(t>0)$，则由 $\varphi'(t)=e^t(1+t)>0$，知 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，于是，$x>1$ 时，由(*)知 $\varphi(\lambda x)\geqslant\varphi(\ln x)$，即 $\lambda\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，故所求 λ 的最小值即为函数 $p(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$ 的最大值，因为 $p'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，故 $1<x<e$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 递增，$x>e$ 时，$p'(x)<0$，函数 $p(x)$ 递减，综上，$\lambda_{\min}=p(x)_{\max}=p(e)=\frac{1}{e}$.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

25. 【解析】(1)因为 $a=e-2b$，所以 $f(x)=\ln x+(e-a)x-2b=\ln x+2bx-2b$. $f'(x)=\frac{1}{x}+2b=\frac{2bx+1}{x}$，若 $b\geqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不满足题意；若 $b<0$，则当 $x\in\left(0,-\frac{1}{2b}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(-\frac{1}{2b},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{2b}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{2b},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 的极大值也是最大值为 $f\left(-\frac{1}{2b}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2b}\right)-1-2b$. 因为 $f(x)\geqslant 0$ 有唯一解，所以 $f\left(-\frac{1}{2b}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2b}\right)-1-2b=0$，即 $b=-\frac{1}{2}$；

(2)略，参考例 2 的常规方法部分.

专题 6　指对跨阶系列一之改头换面分而治之

达标训练

1. A 【解析】$f(e^x)=ax-2e^x$，所以 $f(x+1)>ax-2e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，等价于 $f(x+1)>f(e^x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，属于同构式，因为 $x\in(0,+\infty)$ 时，$1<x+1<e^x$，所以只需 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减，即 $x>1$，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，即 $x>1$ 时，$\frac{a}{x}\leqslant 2$ 恒成立，$a\leqslant 2x$，所以 $a\leqslant 2$，故选 A.

2. A 【解析】因为 $f(x)=e^{x-\ln x}-k(x-\ln x)$，当 $x=1$ 是唯一极值点时，故可知是极小值点，$x-\ln x=1$，即 e^t-kt 取得极值时，$t=1$，故考虑到 $e^t\geqslant et$ 的条件，故 $k\leqslant e$.

3. 【解析】因为 $g(x)=x-\ln(x+m)$ 的保值区间是 $[2,+\infty)$，所以 $x-\ln(x+m)\geqslant x-(x-m-1)=1-m=2\Rightarrow m=-1$，当仅当 $x=2$ 时等号成立，故答案为 -1.

4. 【解析】$f(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}=\frac{e^{x+\ln x}-(\ln x+1)}{x}\geqslant\frac{x+\ln x+1-(\ln x+1)}{x}=1$，取等条件为 $x+\ln x=0$，故答案为 1.

5. 【解析】$f(x)=\frac{x+1+\ln x-e^{x+\ln x}}{e^x}\leqslant\frac{x+1+\ln x-(x+\ln x+1)}{e^x}=0$，取等条件为 $x+\ln x=0$，故答案为 0.

6. 【解析】$f(x)=\frac{e^{x+2\ln x}-2\ln x}{x+1}\geqslant\frac{x+2\ln x+1-2\ln x}{x+1}=1$，取等条件为 $x+2\ln x=0$，故答案为 1.

7. 【解析】$xe^x-x-a(\ln x+1)=e^{x+\ln x}-x-a(\ln x+1)\geqslant x+\ln x+1-x-a(\ln x+1)=(1-a)(\ln x+1)\geqslant 0$. 故 $a\leqslant 1$，取等条件为 $x+\ln x=0$，其实数解在区间 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 内，符合要求，所以 $a\leqslant 1$，故答案为 1.

8. 【解析】此题可以转化为 $axe^x-x-\ln x=0$ 有唯一解，$a\leqslant 0$ 时显然有唯一零点，当 $a>0$ 时，根据 $e^x\geqslant ex$ 可知，$axe^x-x-\ln x=ae^{x+\ln x}-x-\ln x\geqslant(ae-1)(x+\ln x)=0$，当仅当 $a=\frac{1}{e}$ 时等号成立，此时有唯一零点，故 $a=\frac{1}{e}$ 或者 $a\leqslant 0$，故答案为 $a=\frac{1}{e}$ 或者 $a\leqslant 0$.

9. 【解析】$f(x)=e^{x-\ln x}-a(x+\ln x)$. 构造函数 $g(x)=x+\ln x$，显然该函数单调递增，对于任意的实数 t，当 $x>1$ 且 $x>t$ 时，有 $g(x)>t$；当 $0<x<1$ 且 $0<x<e^{t-1}$ 时，有 $g(x)<t$. 故对任意实数 t，方程 $f(x)=t$ 都有唯一实数解.（解答题务必说明 $x+\ln x$ 的值与 x 的值一一对应）从而 $f(x)=e^{x+nx}-a(x+\ln x)$ 有两个零点等价于

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$h(t)=e^t-at$ 有两个零点，易知实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$（后面是简单的零点问题，过程略去了），故答案为 $(e,+\infty)$.

10. ②③

11. 【解析】因为 $e^x\geqslant ex$，等号当 $x=1$ 时取得，又因为 $x\geqslant \ln x+1$，等号当 $x=1$ 时取得；两边同乘以 $\frac{e}{x}$ 得：$\frac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}\geqslant e(x-\ln x)\Rightarrow e^{x-1}\geqslant x^2-x\ln x$，当仅当 $x-\ln x=1$，即 $x=1$ 时取得，又 $x>1$，故 $e^{x-1}>x^2-x\ln x$.

12. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=2-\frac{a}{x}=\frac{2x-a}{x}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，当 $a>0$，则当 $0<x<\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上为增函数，综上可得，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上为减函数，在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上为增函数；

(2) 证明 $a=2$ 时，令 $h(x)=g(x)-f(x)=\frac{e^x}{x}-2x+2\ln x$，$x>0$.

解法一：所以 $h'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}-2+\frac{2}{x}=\frac{e^x(x-1)-2x(x-1)}{x^2}=\frac{(e^x-2x)(x-1)}{x^2}$，令 $m(x)=e^x-2x$，$(x>0)$，得 $m'(x)=e^x-2$，当 $0<x<\ln 2$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，当 $x>\ln 2$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，所以 $m(x)\geqslant m(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以当 $x=1$ 时，$h(x)$ 的取最小值 $h(1)=e-2>0$，所以当 $a=2$ 时，$g(x)>f(x)$.

解法二：$h(x)=g(x)-f(x)=\frac{e^x}{x}-2x+2\ln x=e^{x-\ln x}-2(x-\ln x)$，令 $x-\ln x=t$，$h(t)=e^t-2t\geqslant(e-2)t>0$，等号为 $t=x-\ln x=1$，当仅当 $x=1$ 时等号成立.

注意：构造 $x-\ln x=t$，一定要说明 x 与 t 是一一对应的关系.

13. 【解析】思路分析：(1) 求出 $f(x)$ 的导数，求得切线的斜率，解方程可得 m；

(2) 求出函数 $h(x)$ 的表达式，将函数有两个零点转化为方程有两个根，构造函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 转化为两个函数的交点个数问题进行求解即可；

(3) $f(x)>g(x)-x^3$ 即为 $e^{x+m}>\ln(x+1)+2$. 采用改头换面法，由函数 $y=e^x-x-1$，求得最小值，可得 $e^x\geqslant x+1$，则 $e^{x+m}>x+m+1$，再由 $h(x)=x+m+1-\ln(x+1)-2=x+m-\ln(x+1)-1$，求出导数，求得最小值，由条件即可得证.

(1) 因为 $f(x)=e^{x+m}-x^3$，所以 $f'(x)=e^{x+m}-3x^2$. 因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 1，所以 $f'(0)=e^m=1$，解得 $m=0$；

(2) 若 $h(x)=g(x-1)-ax-2=\ln x+2-ax-2=\ln x-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个零点，等价为 $\ln x-ax=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个不同的根，即 $a=\frac{\ln x}{x}$，设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则函数的导数 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，由 $g'(x)>0$ 得 $0<x<e$，由 $g'(x)<0$，得 $x>e$，即当 $x=e$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值 $g(e)=\frac{1}{e}$，又 $g(x)$ 有且只有一个零点 1，当 x

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\to 0$ 时，$g(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$ 时，$g(x)\to 0$，则要使 $a=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[0,\ +\infty)$ 上有两个不同的根，则 $0<a<\frac{1}{e}$；

(3)证明：$f(x)>g(x)-x^3$ 即为 $e^{x+m}>\ln(x+1)+2$. 由 $y=e^x-x-1$ 的导数为 $y'=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$y'>0$，函数递增；当 $x<0$ 时，$y'<0$，函数递减. 即有 $x=0$ 处取得极小值，也为最小值 0. 即有 $e^x\geqslant x+1$，则 $e^{x+m}\geqslant x+m+1$，由 $h(x)=x+m+1-\ln(x+1)-2=x+m-\ln(x+1)-1$，$h'(x)=1-\frac{1}{x+1}$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 递增；$-1<x<0$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 递减. 即有 $x=0$ 处取得最小值，且为 $m-1$，当 $m\geqslant 1$ 时，即有 $h(x)\geqslant m-1\geqslant 0$，即 $x+m+1\geqslant\ln(x+1)+2$，则有 $f(x)>g(x)-x^3$ 成立.

14. 【解析】(1)因为 $f'(x)=(x+1)(e^x-a-1)$，①当 $a\leqslant -1$ 时，$f'(x)$ 在 $(-1,\ +\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ -1)$ 上单调递减；②当 $-1<a<\frac{1-e}{e}$ 时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,\ \ln(a+1))$，$(-1,\ +\infty)$ 上单调递增；在 $(\ln(a+1),\ -1)$ 上单调递减；③当 $a=\frac{1-e}{e}$ 时，$f'(x)$ 在 R 上单调递增；④当 $a>\frac{1-e}{e}$ 时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,\ -1)$，$(\ln(a+1),\ +\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,\ \ln(a+1))$ 上单调递减；

(2)因为函数 $y=f(x)$ 的图像上存在点在函数 $y=g(x)$ 的图像的下方，可知 $\exists x>0$，使得 $f(x)<g(x)$ 成立，所以 $xe^x-\frac{1}{2}(a+1)(x^2+2x)<\ln x-\frac{1}{2}(a+1)x^2-ax+a+1$，即 $\exists x>0$，$xe^x-\ln x-x-1<a$ 有解，设 $h(x)=xe^x-\ln x-x-1$，(常规方法)：所以 $h'(x)=\frac{x+1}{x}(xe^x-1)$，令 $\varphi=xe^x-1$，则当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上递增，因为 $\varphi(0)=-1$，$\varphi(x)=e-1$，所以 $\varphi(x)$ 存在唯一的零点 $t\in(0,\ 1)$，且当 $x\in(0,\ t)$ 时，$\varphi(x)<0$，当 $x\in(t,\ +\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，则当 $x\in(0,\ t)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(t,\ +\infty)$ 时，$h'(x)>0$ 单调递增，故 $h(x)\geqslant h(t)=te^t-\ln t-t-1$，由 $te^t-1=0$，可得 $\ln t+t=0$，所以 $h(t)=0$，所以 $h(x)\geqslant h(t)=0$，所以 $a>0$，即实数 a 的取值范围是 $a>0$.

特殊解法：$h(x)=xe^x-\ln x-x-1=e^{x+\ln x}-\ln x-x-1\geqslant 0$，取等条件是 $x+\ln x=0$，故 $a>0$.

15. 【解析】(1)$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，所以当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最大值 $g(1)=\frac{1}{e}$. 因为若对任意 $x\in R$，不等式 $g(x)-b<0$ 恒成立，所以 $b>\frac{1}{e}$；

(2)$a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=\ln x-x+\frac{e^{x-1}}{x}(x>0)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}=\frac{(x-1)(e^{x-1}-x)}{x^2}$，令 $h(x)=e^{x-1}-x(x>0)$，则 $h'(x)=e^{x-1}-1$，所以当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$. 所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,\ 1)$，单调递增区间为 $(1,\ +\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{ae^x(x-1)}{x^2}=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{(x-1)(ae^x-x)}{x^2}(x>0)$，①当 $a\leqslant 0$ 时，$ae^x-x<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=ae-1$；

②当 $a>0$ 时，令 $m(x)=ae^x-x$，则 $m'(x)=ae^x-1$，令 $m'(x)=0$ 可得 $x=\ln\frac{1}{a}$.

（ⅰ）若 $\ln\frac{1}{a}\leqslant 0$，即 $a\geqslant 1$，则当 $x>0$ 时，$m'(x)>0$，故 $m(x)$ 单调递增，所以 $m(x)>m(0)=a>0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=ae-1$；

（ⅱ）若 $0<\ln\frac{1}{a}<1$，即 $\frac{1}{e}<a<1$，当 $0<x<\ln\frac{1}{a}$ 时，$m'(x)<0$，当 $x>\ln\frac{1}{a}$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)\geqslant m\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}>0$，由（ⅰ）可知 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=ae-1$；

（ⅲ）若 $\ln\frac{1}{a}=1$，即 $a=\frac{1}{e}$ 时，由（2）可知 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=ae-1$；

（ⅳ）若 $\ln\frac{1}{a}>1$，即 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，由（ii）可知 $m(x)$ 的最小值为 $m\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-\ln\frac{1}{a}<0$，又当 $x\to 0$ 时，$m(x)\to a>0$，当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to+\infty$，所以 $m(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两解，设 $m(x_0)=0$，则 $f(x)$ 的极值为 $f(1)$ 和 $f(x_0)$. 由 $m(x_0)=ae^{x_0}-x_0=0$，得 $ae^{x_0}=x_0$，两边取对数可得 $\ln a+x_0=\ln x_0$，故而 $\ln x_0-x_0=\ln a$. 所以 $f(x_0)=\ln x_0-x_0+\frac{ae^{x_0}}{x_0}=\ln a+1$.

综上，当 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的极值为 $ae-1$，当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的极值为 $ae-1$ 和 $\ln a+1$.

16. 【解析】(1)因为函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，所以 $f'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立. 又 $f'(x)=2x+a-\frac{1}{x}=\frac{2x^2+ax-1}{x}$，令 $h(x)=2x^2+ax-1$，所以 $\begin{cases}h(1)\leqslant 0\\ h(2)\leqslant 0\end{cases}$，解得 $a\leqslant-\frac{7}{2}$；

(2)因为 $f(x)=x^2+ax-\ln x$，所以 $g(x)=f(x)-x^2=ax-\ln x$，$x\in(0,e]$. 所以 $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}(0<x\leqslant e)$，①当 $a\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，$g(x)_{min}=g(e)=ae-1=3$，解得 $a=\frac{4}{e}$（舍去）；②当 $0<\frac{1}{a}<e$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},e\right]$ 上单调递增，所以 $g(x)_{min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a=3$，解得 $a=e^2$，满足条件；③当 $\frac{1}{a}\geqslant e$ 时，$g(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，$g(x)_{min}=g(e)=ae-1=3$，解得 $a=\frac{4}{e}$（舍去）；综上，存在实数 $a=e^2$，使得当 $x\in(0,e]$ 时，$g(x)$ 有最小值 3；

(3)证明：采用分而治之原理，令 $F(x)=e^2x-\ln x$，由(2)得 $F(x)_{min}=3$，令 $t(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{5}{2}$，$t'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x\leqslant e$ 时，$\omega'(x)\geqslant 0$，$\omega(x)$ 在 $(0,e]$ 递增，所以 $\omega(x)_{max}=\omega(e)=3$ 故 $e^2x-\ln x>\frac{\ln x}{x}+\frac{5}{2}$，即 $e^2x^2-\frac{5}{2}x>(x+1)\ln x$.

17. 【解析】(1)$e^x-x-m>0$ 恒成立对 $x>0$ 恒成立，令 $g(x)=e^x-x$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x-1>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，故当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=1$；

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

故若使 $e^x - x - m > 0$ 恒成立对 $x > 0$ 恒成立，则只需使 $m \leqslant 1$；

(2)思路分析：利用分而治之证明，令 $h(x) = x - \ln x$，$n(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$，分别利用导数求函数的单调性，从而确定函数的最值，从而证明不等式，过程如下：

证明：$\left(\frac{x-\ln x}{e^x}\right) f(x) = (x - \ln x)\left(1 - \frac{x-1}{e^x}\right)$；

令 $h(x) = x - \ln x$，$h'(x) = \frac{x-1}{x}$；当 $0 < x < 1$ 时，$h'(x) < 0$，当 $x > 1$ 时，$h'(x) > 0$；即 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数，在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，所以 $h(x) \geqslant h(1) = 1$①. 令 $n(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$，$n'(x) = \frac{x-2}{e^x}$，故 $n(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}$ 在 $(0, 2)$ 上是减函数，在 $(2, +\infty)$ 上为增函数；故 $n(x) \geqslant n(2) = 1 - \frac{1}{e^2}$②. 故由①②可得，$\left(\frac{x-\ln x}{e^x}\right) f(x) > 1 - \frac{1}{e^2}$.

18. 【解析】解法一：思路分析(1)求出函数的导数，根据 $f'(0) = 0$，求出 m 的值即可；(2)求出函数的导数，根据导函数的单调性求出函数的最小值，从而求出 k 的范围即可；或者采用切线放缩的改头换面法，利用 $e^x \geqslant x + 1$ 与 $\ln(x + 1) \leqslant xF(x) > 0$，且它们取等条件一致，得出 $k \leqslant 2$；(3)问题转化为 $e^x - \ln(x + m) > 0$，设 $F(x) = e^x - \ln(x + m)$，即证，求出函数的导数，根据函数的单调性证明即可；或者改头换面，利用 $e^x - \ln(x + m) \geqslant x + 1 - (x + m - 1) = 2 - m$，由于 $m \leqslant 2$，故 $f(x) \geqslant 0$，由于取等条件不一致，故 $f(x) > 0$.

(1)因为 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$，$x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(0) = 1 - \frac{1}{m} = 0$，解得：$m = 1$.

经检验 $m = 1$ 符合题意；

(2)由(1)可知，函数 $f(x) = e^x - \ln(x + 1) + 1$，其定义域为 $(-1, +\infty)$. 因为 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} = \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1}$，设 $g(x) = e^x(x + 1) - 1$，则 $g'(x) = e^x(x + 1) + e^x > 0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上为增函数，又因为 $g(0) = 0$，所以当 $x > 0$ 时，$g(x) > 0$，即 $f'(x) > 0$；当 $-1 < x < 0$ 时，$g(x) < 0$，$f'(x) < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上为减函数；在 $(0, +\infty)$ 上为增函数；因此，$f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 2$，所以 $f(x) - k \geqslant 0$ 在定义域内恒成立，即 $k \leqslant f(x)_{\min} = 2$；

(3)常规法证明：要证 $f(x) = e^x - \ln(x + m) + m > m$，即 $e^x - \ln(x + m) > 0$，设 $F(x) = e^x - \ln(x + m)$，即证 $F(x) > 0$，当 $m \leqslant 2$，$x \in (-m, +\infty)$ 时，$\ln(x + m) \leqslant \ln(x + 2)$，故只需证明当 $m = 2$ 时，$F(x) > 0$，当 $m = 2$ 时，函数 $F'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上为增函数，且 $F'(-1) < 0$，$F'(0) > 0$，故 $F'(x) = 0$ 在 $(-2, +\infty)$ 上有唯一实数根 x_0，且 $x_0 \in (-1, 0)$. 当 $x \in (-2, x_0)$ 时，$F'(x) < 0$，当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时，$F'(x) > 0$，从而当 $x = x_0$ 时，$F(x)$ 取得最小值. 由 $F'(x_0) = 0$，得 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0 + 2) = -x_0$，故 $F(x) \geqslant F(x_0) = \frac{1}{x_0+2} + x_0 = \frac{(x_0+1)^2}{x_0+2} > 0$，综上，当 $m \leqslant 2$ 时，$F(x) > 0$ 即 $f(x) > m$.

秒杀法证明：构造 $g(x) = e^x - x - 1$，则 $g'(x) = e^x - 1 = 0$ 时，$x = 0$，$g(x)_{\min} = 0$；再构造 $h(x) = \ln(x + m) - x - m + 1$，$h'(x) = \frac{1}{x+m} - 1 = 0$ 时，$x = 1 - m$，$h(x)_{\max} = 0$；$e^x - \ln(x + m)$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\geqslant x+1-(x+m-1)=2-m$，由于 $m\leqslant 2$，故 $f(x)\geqslant 0$，由于取等条件不一致，故 $f(x)>0$.

19. 【解析】思路分析：(1)求出函数的导数，通过讨论 a 的范围，求出函数的单调区间即可；(2)问题转化为 $b-1\leqslant e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ 恒成立，设 $g(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$，根据函数的单调性求出 $g(x)$ 的最小值，从而求出 b 的范围即可. 或者构造成 $xe^x-(b-1)x-\ln x-1\geqslant 0$ 式子，利用 $xe^x=e^{x+\ln x}\geqslant x+\ln x+1$ 来放缩证明.

(1)由题意知：$f'(x)=\frac{(ax-e^x)(x-1)}{x^2}$，因为当 $a<0$，$x>0$ 时，有 $ax-e^x<0$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减；

(2)解法一：由题意当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x-bx\geqslant 1$ 恒成立，即 $xe^x-\ln x+(1-b)x\geqslant 1$ 恒成立，即 $b-1\leqslant e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ 恒成立，设 $g(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，设 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $h'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}$，当 $x>0$ 时，有 $h'(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，且 $h(1)=e>0$，$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}-\ln 2<0$，故函数 $h(x)$ 有唯一零点 x_0，且 $\frac{1}{2}<x_0<1$，故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增，即 $g(x_0)$ 为 $g(x)$ 在定义域内的最小值，故 $b-1\leqslant e^{x_0}-\frac{\ln x_0}{x_0}-\frac{1}{x_0}$，因为 $h(x_0)=0$，得 $x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}$，$\frac{1}{2}<x_0<1$，$\cdots(*)$

令 $k(x)=xe^x$，$\frac{1}{2}<x<1$，故方程 $(*)$ 等价于 $k(x)=k(-\ln x)$，$\frac{1}{2}<x<1$，而 $k(x)=k(-\ln x)$ 等价于 $x=-\ln x$，$\frac{1}{2}<x<1$，设函数 $m(x)=x+\ln x$，$\frac{1}{2}<x<1$，易知 $m(x)$ 单调递增，又 $m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$，$m(1)=1>0$，故 x_0 是函数的唯一零点，即 $\ln x_0=-x_0$，$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，故 $g(x)$ 的最小值 $g(x_0)=1$，故 b 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

秒杀解法：根据题意可知，$xe^x-(b-1)x-\ln x-1\geqslant 0\Rightarrow e^{x+\ln x}-\ln x-1\geqslant(b-1)x$ 恒成立，即 $[1-(b-1)]x\geqslant 0$ 恒成立，故 $b\leqslant 2$.（一定要说明取等条件和 $t=x+\ln x$ 的一一对应关系）

20. 【解析】思路分析：(1)先求出 $f'(x)=\frac{1-kx-x\ln x}{xe^x}$，$x\in(0,+\infty)$，由 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，得 $f'(1)=0$，从而求出 $k=1$；

(2)由(1)得：$f'(x)=\frac{1}{xe^x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0,+\infty)$，令 $h(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，求出 $h(x)$ 的导数，从而得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减；

(3)分而治之，加上指数找朋友，因 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0,+\infty)$，由(2) $h(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，得 $1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$，设 $t(x)=\frac{x+1}{e^x}$，得 $t(x)<t(0)=1$，进而 $g(x)<1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$，问题得以证明.

(1)因为 $f'(x)=\frac{1-kx-x\ln x}{xe^x}$，且 $y=f(x)$ 在

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$(1, f(1))$处的切线与x轴平行，所以$f'(1)=0$，所以$k=1$；

(2)由(1)得：$f'(x)=\frac{1}{xe^x}(1-x-x\ln x)$，令$h(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0, +\infty)$，当$x\in(0, 1)$时，$h(x)>0$，当$x\in(1, +\infty)$时，$h(x)<0$，又$e^x>0$，所以$x\in(0, 1)$时，$f'(x)>0$，$x\in(1, +\infty)$时，$f'x)<0$，所以$f(x)$在$(0, 1)$递增，在$(1, +\infty)$递减；

(3)证明：因为$g(x)=(x^2+x)f'(x)$，所以$g(x)=\frac{x+1}{e^x}(1-x-x\ln x)$，$x\in(0, +\infty)$，设$t(x)=\frac{x+1}{e^x}$，所以$t'(x)=\frac{-x}{e^x}$，所以$x\in(0, +\infty)$时，$t'(x)<0$，$t(x)$递减，所以$t(x)<t(0)=1$，所以$x\in(0, +\infty)$时，$\frac{x+1}{e^x}<1$，所以$\forall x>0$，$g(x)<1+e^{-2}\Leftrightarrow 1-x-x\ln x<1+e^{-2}$，由(Ⅱ)$h(x)=1-x-x\ln x$，$x\in(0, +\infty)$，所以$h'(x)=-(\ln x-\ln e^{-2})$，$x\in(0, +\infty)$，所以$x\in(0, e^{-2})$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增，$x\in(e^{-2}, +\infty)$时，$h(x)<0$，$h(x)$递减，所以$h(x)_{max}=h(e^{-2})=1+e^{-2}$，所以$1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$，所以$g(x)<1-x-x\ln x\leqslant 1+e^{-2}$，所以$\forall x>0$，$g(x)<1+e^{-2}$.

21. 【解析】(1)证明：$f'(x)=(x+1)e^x+\frac{1-\ln x}{x^2}$，易知$f'(x)$在$(0, 1)$上为正，因此$f(x)$在区间$(0, 1)$上为增函数，又$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}-e^2}{e}<0$，$f(1)=e>0$，因此$f\left(\frac{1}{e}\right)f(1)<0$，即$f(x)$在区间$(0, 1)$上恰有一个零点，由题可知$f(x)>0$在$(1, +\infty)$上恒成立，即在$(1, +\infty)$上无零点，则$f(x)$在$(0, +\infty)$上存在唯一零点；

(2)常规解法：原不等式可化为$\frac{xe^x-\ln x-1}{x}\geqslant k$，令$g(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$，则$g'(x)=\frac{xe^x+\frac{\ln x}{x}}{x}$，由(1)可知$g(x)$在$(0, x_0)$上单调递减，在$(x_0, +\infty)$上单调递增，所以$g(x)_{min}=g(x_0)$，设$f(x)$的零点为$x_0$，即$x_0e^{x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$，下面分析$x_0e^{x_0}+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$，设$x_0e^{x_0}=t$，则$\frac{\ln x_0}{x_0}=-t$，可得$\begin{cases}\ln x_0=-tx_0\\ \ln x_0+x_0=\ln t\end{cases}$，即$x_0(1-t)=\ln t$，若$t>1$，等式左负右正不相等，若$t<1$，等式左正右负不相等，只能$t=1$. 因此$g(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}=1$，即$k\leqslant 1$求所求.

秒杀解法：$xe^x-\ln x\geqslant 1+kx\Rightarrow e^{x+\ln x}\geqslant \ln x+kx+1$对任意$x\in(0, +\infty)$恒成立，因为$e^{x+\ln x}\geqslant x+\ln x+1$，当仅当$x+\ln x=0$时等号成立，故$e^{x+\ln x}\geqslant \ln x+x+1\geqslant \ln x+kx+1\Rightarrow(1-k)x\geqslant 0$，即$k\leqslant 1$.

22. 【解析】思路分析：(1)利用导数$g'(x)=0$，求得极值点，讨论a的取值情况，判断是极大值还是极小值点；

(2)不等式化为$f(x)-x-\ln(x-1)\geqslant m$，构造$h(x)=f(x)-x-\ln(x-1)$，$x>1$；求$h(x)$的最小值即可求得$m$的取值范围. 或者采用改头换面法，$(x-1)e^x-x-\ln(x-1)=e^{x+\ln(x-1)}-x-\ln(x-1)\geqslant 1$，当仅当$x+\ln(x-1)=0$时等号成立.

(1)函数$f(x)=(x-1)e^x$，所以函数$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}ax^2=(x-1)e^x+\frac{1}{2}ax^2$；所以$g'(x)=xe^x+ax=x(e^x+a)$，令$g'(x)=0$，解得$x=0$

获取更多资料加qq群698274639

 获取更多资料加qq群698274639

或 $x=\ln(-a)$；①当 $a=-1$ 时，$\ln(-a)=0$，当 x 在 $\mathbf{R}$ 上变化时，可得下表：

x	$(-\infty,\ln(-a))$	$\ln(-a)$	$(\ln(-a),0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	极小值	↘	极大值	↗

所以由表可知，此时极大值点为 $x=\ln(-a)$，极小值点为 $x=0$；②同理当 $-1<a<0$ 时，极大值点为 $x=0$，极小值点为 $x=\ln(-a)$；③当 $a=-1$ 时，$g'(x)=x(e^x-1)\geqslant 0$ 恒成立，此时 $g(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，既无极大值点也无极小值点；

(2)常规解法：不等式 $f(x)\geqslant x+m+\ln(x-1)$ 化为 $f(x)-x-\ln(x-1)\geqslant m$，设 $h(x)=f(x)-x-\ln(x-1)$，$x>1$；所以 $h(x)=(x-1)e^x-x-\ln(x-1)$，其中 $x>1$；则 $h'(x)=xe^x-1-\frac{1}{x-1}=xe^x-\frac{x}{x-1}=x\left(e^x-\frac{1}{x-1}\right)$，令 $F(x)=e^x-\frac{1}{x-1}$，$x>1$；则 $F'(x)=e^x+\frac{1}{(x-1)^2}>0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 为增函数，所以 $F(2)=e^2-1>0$；取 $x-1=e^{-2}$，则 $x=1+e^{-2}$，$F(1+e^{-2})=e^{1+e^{-2}}-e^2<0$；所以存在唯一 $x_0\in(1+e^{-2},2)$，使 $F(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0-1}$；又 $1<x<x_0$ 时，$F(x)<0$，即 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 为减函数；$x>x_0$ 时，$F(x)>0$，即 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 为增函数；所以 $h(x)_{\min}=(x_0-1)e^{x_0}-x_0-\ln(x_0-1)$，所以 $h(x)_{\min}\geqslant x_0-1-x_0-\frac{1}{x_0-1}\ln e^{x_0}\geqslant 1$ 所以对 $\forall x>1$，有 $f(x)\geqslant x+m+\ln(x-1)$ 成立等价 $f(x)-x-\ln(x-1)\geqslant 1\geqslant m$ 恒成立，即 $m\leqslant 1$；所以 m 的取值范围是 $m\leqslant 1$.

秒杀解法：$h(x)=(x-1)e^x-x-\ln(x-1)=e^{x+\ln(x-1)}-x-\ln(x-1)$，令 $t=x+\ln(x-1)$，$t'=1+\frac{1}{x-1}>0$ 对 $x>1$ 恒成立，故 $t=x+\ln(x-1)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$h(t)=e^t-t\geqslant m$ 恒成立，则 $h'(t)=e^t-1$，当 $t=0$ 时，$h(t)$ 取得最小值，此时 $h(0)=1\geqslant m$，由于 $t=x+\ln(x-1)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，故当仅当 $t=x+\ln(x-1)=0$ 时，等号成立.

23. 【解析】思路分析：(1)求出函数的导数，解关于导函数的不等式，求出函数的单调区间即可；(2)分而治之，求出 $f(x)$ 的最小值，$g(x)$ 的最大值，要使 $f(x)>g(x)$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 成立，只需 $f(x)_{\text{最小值}}>g(x)_{\text{最大值}}$，从而求出 a 的范围.

(1)$f'(x)=(2x-1)\ln x+(x^2-x)\cdot\frac{1}{x}-3x+2=(2x-1)(\ln x-1)$，$x\in(0,+\infty)$，令 $f'(x)>0$，解得：$x>e$ 或 $x<\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$，解得 $\frac{1}{2}<x<e$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(e,+\infty)$ 上递增，在 $\left(\frac{1}{2},e\right)$ 上递减；

(2)由(1)得：$f(x)$ 在 $(1,e)$ 上递减，在 $(e,+\infty)$ 上递增，所以 $f(x)_{\text{最小值}}=f(e)=e-\frac{1}{2}e^2$，因为 $g'(x)=\frac{(a+1)(\ln x-1)}{(\ln x)^2}$，所以 $a+1<0$ 时，$g(x)$ 在 $(1,e)$ 上递增，在 $(e,+\infty)$ 上递减，所以 $g(x)_{\text{最大值}}=g(e)=(a+1)e$，要使 $f(x)>g(x)$ 对任意 $x\in(1,+\infty)$ 成立，必须 $f(x)_{\text{最小值}}>g(x)_{\text{最大值}}$，即 $f(e)>g(e)$，所以 $a<-\frac{1}{2}e$，所以 $a+1\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 0$，而 $f(x)_{\text{最小值}}=e-\frac{1}{2}e^2<0$，所以 $f(x)>g(x)$ 对

 获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\forall x \in (1, +\infty)$不可能成立，综上，$a < -\frac{1}{2}e$.

24. 【解析】(1) $f(x) = e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x}$，$x > 0$，所以 $f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{2xe^{x-1} - 2e^{x-1}}{x^2}$，所以 $f(1) = 2$，$f'(1) = e$，所以切线方程为 $y = ex + 2 - e$；

(2)证明：$g(x) = \frac{x}{e^x} f(x) = x\ln x + \frac{2}{e}$，所以 $g'(x) = 1 + \ln x$，由 $g'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{e}$，$g'(x) < 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{e}$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上是减函数，在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上是递增函数，在 $x = \frac{1}{e}$ 时，$g(x)$ 取到最小值 $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$；令 $h(x) = \frac{x}{e^x}$，则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ 由 $h'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$，由 $h'(x) < 0$ 得 $x > 1$，所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数，在 $(1, +\infty)$ 上是减函数. 在 $x = 1$ 时，$h(x)$ 取到最大值 $h(1) = \frac{1}{e}$，所以对任意 $x > 0$，都有 $g(x) > \frac{x}{e^x}$ 成立.

25. 【解析】思路分析：(1)求出函数的导数，根据 $f'(e) = -\frac{1}{e^2}$，求出 a 的值，从而求出函数的单调区间，结合题意得到关于 m 的不等式组，解出即可；(2)不等式转化为 $\frac{1}{e+1} \cdot \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x} > \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$，故采用分而治之，令 $g(x) = \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x}$，$h(x) = \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$，证明 $\frac{g(x)_{\min}}{e+1} > h(x)_{\max}$.

(1) $f(x) = \frac{a+\ln x}{x}$，所以 $f'(x) = \frac{1-a-\ln x}{x^2}$，由题意得：$f'(e) = -\frac{1}{e^2}$，所以 $-\frac{a}{e^2} = -\frac{1}{e^2}$，解得：$a = 1$，所以 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$，$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$，$(x > 0)$，$x \in (0, 1)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 递增，$x \in (1, +\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 递减，故函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 时取得极值，又函数 $f(x)$ 在 $[m, m+1]$ 上存在极值，所以 $m \leqslant 1 \leqslant m+1$，所以 $0 \leqslant m \leqslant 1$，故 m 的范围是 $[0, 1]$；

(2)证明：$x > 1$ 时，$\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$，即为 $\frac{1}{e+1} \cdot \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x} > \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$，令 $g(x) = \frac{(x+1)(\ln x+1)}{x}$，则 $g'(x) = \frac{x-\ln x}{x^2}$，令 $t(x) = x - \ln x$，则 $t'(x) = \frac{x-1}{x}$，因为 $x > 1$，所以 $t'(x) > 0$，所以 $t(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增，因为 $t(1) = 1$，所以 $x > 1$ 时，$g'(x) > 0$，$g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增，所以 $x > 1$ 时，$g(x) > g(1)$，又 $g(1) = 2$，故 $\frac{g(x)}{e+1} > \frac{2}{e+1}$，令 $h(x) = \frac{2e^{x-1}}{xe^x+1}$，则 $h'(x) = \frac{2e^{x-1}(1-e^x)}{(xe^x+1)^2}$，因为 $x > 1$，所以 $\frac{2e^{x-1}(1-e^x)}{(xe^x+1)^2} < 0$，所以 $x > 1$ 时，$h'(x) < 0$，故函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减，又 $h(1) = \frac{2}{e+1}$，所以 $x > 1$ 时，$h(x) < \frac{2}{e+1}$，所以 $\frac{g(x)}{e+1} > h(x)$，即 $\frac{f(x)}{e+1} > \frac{2e^{x-1}}{(x+1)(xe^x+1)}$.

专题7　指对跨阶系列二之同构式构造

达标训练

1. C　【解析】同构式构造，设 $g(x) = f(x) + x$，因为 $f'(x) \geqslant 0$，所以 $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$，则 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，由 $f(\ln t) + \ln t - 1 \leqslant$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$f(1)$，得$f(\ln t)+\ln t\leqslant f(1)+1$，即$g(\ln t)\leqslant g(1)$，则$\ln t\leqslant 1$，所以$0<t\leqslant e$. 所以满足不等式$f(\ln t)+\ln t-1\leqslant f(1)$的实数$t$的集合是$(0,e]$，故选C.

2. A 【解析】同构式构造，$f(e^x)=ax-2e^x$，所以$f(x+1)>ax-2e^x$在$(0,+\infty)$上恒成立，等价于$f(x+1)>f(e^x)$在$(0,+\infty)$上恒成立，因为$x\in(0,+\infty)$时，$1<x+1<e^x$，所以只需$f(x)$在$(1,+\infty)$上递减，即$x>1$，$f'(x)\leqslant 0$恒成立，即$x>1$时，$\frac{a}{x}\leqslant 2$恒成立，$a\leqslant 2x$，所以$a\leqslant 2$，故选A.

3. D 【解析】同构式构造，令$x=e$，则有$e^2-me^{\frac{m}{e}}\geqslant 0$，$x^2\ln x-e\cdot e^{\frac{e}{x}}\geqslant 0$，即证：$x\ln x=e^{\ln x}\ln x\geqslant e^{\frac{e}{x}}\cdot\ln e^{\frac{e}{x}}$，令$x\geqslant e^{\frac{e}{x}}$，因此$m_{max}=e$. 故选D.

4. C 【解析】$2x^2e^{2x}+\ln x=0\Rightarrow 2xe^{2x}=-\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}=e^{\ln\frac{1}{x}}\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2x=\ln\frac{1}{x}\Rightarrow 2x_0+\ln x_0=0$，故选C.

5. D 【解析】$a(e^{ax}+1)\geqslant 2\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Rightarrow axe^{ax}+ax\geqslant 2x^2\ln x+2\ln x=x^2\ln x^2+\ln x^2=e^{\ln x^2}\ln x^2+\ln x^2$，属于同构式$f(x)=xe^x+x$，即$ax\geqslant\ln x^2\Rightarrow a\geqslant\frac{2\ln x}{x}=\frac{2}{e}$，故选D.

6. 【解析】令$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$x>0$. 因为对任意的$x>0$，$f(x)-x\cdot f'(x)<0$恒成立，所以$g'(x)=\frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}>0$. 所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 关于实数$t$的不等式$f(\sqrt{t^2-t-2})<\sqrt{t-2}\cdot f(\sqrt{t+1})$，化为同构式：$\frac{f(\sqrt{t^2-t-2})}{\sqrt{t^2-t-2}}<\frac{f(\sqrt{t+1})}{\sqrt{t+1}}$，即$g(\sqrt{t^2-t-2})<g(\sqrt{t+1})$，$t^2-t-2>0$，$t+1>0$，解得$t>2$. 所以$\sqrt{t^2-t-2}<\sqrt{t+1}$，化为：$t^2-t-2<t+1$，即$t^2-2t-3<0$，解得$-1<t<3$. 又$t>2$，所以$2<t<3$，故答案为$2<t<3$.

7. 【解析】(1)由题设知，$f'(2)=0$，所以$a=\frac{1}{2e^2}$，经检验$a=\frac{1}{2e^2}$符合题意，从而$f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$，$g(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-1-\frac{x}{e^2}$，$g'(x)=\frac{e^x}{2e^2}-\frac{1}{e^2}=\frac{1}{2e^2}(e^x-2)$，当$x>\ln 2$时，$g'(x)>0$；当$0<x<\ln 2$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增；

(2)因为$ae^x-\ln x-1\geqslant 0$恒成立，即$ae^x\geqslant\ln ex$恒成立，即$a\cdot exe^x\geqslant ex\ln ex=e^{\ln ex}\cdot\ln ex$恒成立，设$g(t)=te^t$，则$g'(t)=e^t(t+1)$，显然当$t>0$时，$g(t)$单调递增，故$a\cdot exe^x\geqslant ex\ln ex=e^{\ln ex}\cdot\ln ex\Rightarrow aeg(x)\geqslant g(\ln ex)$恒成立，则需满足$\begin{cases}ae\geqslant 1\\ x\geqslant\ln ex\end{cases}$，令$h(x)=x-\ln ex=x-\ln x-1$，$h'(x)=1-\frac{1}{x}$，显然$h(x)_{min}=h(1)=0$，故只需$ae\geqslant 1$，所以$a\geqslant\frac{1}{e}$.

8. 【解析】(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因为$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，所以$x\in(-\infty,0)$，$(0,1)$时，$f'(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以函数$f(x)$的单调增区间为$(1,+\infty)$，减区间为$(-\infty,0)$，$(0,1)$；

(2)$af(x)>\ln x\Leftrightarrow\frac{ae^x}{x}-\ln x>0$. 当$a\geqslant\frac{2}{e^2}$，令$F(x)=\frac{ae^x}{x}-\ln x$，$F'(x)=\frac{1}{x^2}[a(x-1)e^x-x]$.$(x>0)$. ①当$\in(0,1]$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，$F(x)\geqslant F(1)=ae>0$；②当$x>1$时，$F(x)=\frac{ae^x}{x}-\ln x>\frac{2e^x}{e^2x}-\ln x$，令$g(x)=\ln x-\frac{x}{e}$，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$，当$x=e$时$g(x)_{max}=\ln e-$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\frac{e}{e}=0$，即 $\ln x\leqslant\frac{x}{e}$，故只需证$\frac{2e^x}{e^2x}-\frac{x}{e}>0$，只需证$\frac{ex^2}{e^x}<2$ 令 $h(x)=\frac{ex^2}{e^x}$，$h'(x)=\frac{ex(2-x)}{e^x}$，故$h(x)$在$(0,2)\uparrow$，在$(2,+\infty)$上单调递减. 当 $x=2$ 时，$h(x)_{\min}=h(2)=\frac{e^2}{4}<2$，综上所述，当 $a\geqslant\frac{2}{e^2}$时，$af(x)>\ln x$ 成立.

9. 【解析】(1)$f'(x)=e^x+m$，①$m\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在 R 递增，②$m<0$ 时，令$f'(x)>0$，解得：$x>\ln(-m)$，令$f'(x)<0$，解得：$x<\ln(-m)$，故 $f(x)$在$(-\infty,\ln(-m))$递减，在$(\ln(-m),+\infty)$递增；

(2)分析思路：由 $f'(0)=1+m=1$，解得：$m=0$，故 $f(x)=e^x-1$，要证明 $x>0$ 时，$f(x)-2\ln x>3-2\ln2$，即证明 $x>0$ 时，$e^x-2\ln x>4-2\ln2\Rightarrow\frac{e^x}{2}>\ln\frac{x}{2}+2$，根据“放对再放指，常数是关键”$\ln x\leqslant x-1\Rightarrow\ln ex\leqslant ex-1\Rightarrow\ln x\leqslant ex-2$，故构造 $\ln\frac{x}{2}\leqslant\frac{e}{2}x-2$(取等条件为 $x=\frac{2}{e}$)，如此便可以消去常数项，即只需证明$\frac{e^x}{2}>\frac{ex}{2}$，显然成立.

10. 【解析】(1)只需证明 $e^{x-1}\geqslant x$(当且仅当 $x=1$ 时取等号). $x\geqslant\ln x+1$(当且仅当 $x=1$ 时取等号)，即可证明$f'(x)\geqslant0$；

(2)同构式构造，若 $f(x)$有两个极值点，即 $f'(x)=e^{x-m}-\ln x-m=0\Rightarrow\frac{e^x}{e^m}=\ln xe^m\Rightarrow xe^x=xe^m\ln xe^m=e^{\ln xe^m}\ln xe^m$ 有两个变号零点. $x=\ln(xe^m)$有两根，即$\frac{x}{\ln x}=e^m\in(e,+\infty)$有两根，$m>1$.

11. 【解析】(1)函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$. 所以 $x>0$，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$，因为 $x=2$ 是 $f(x)$的极值点，所以$f'(2)=ae^2-\frac{1}{2}=0$，解得 $a=\frac{1}{2e^2}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$，所以$f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$，当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增；

(2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1$，即只需要证明$\frac{e^x}{e}\geqslant\ln x+1=\ln ex\Leftrightarrow xe^x\geqslant ex\ln ex=e^{\ln ex}\ln ex$，设 $g(x)=xe^x$，则$g'(x)=e^x(x+1)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$恒成立，故只需证 $x\geqslant\ln ex=\ln x+1$ 恒成立，所以当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

12. 【解析】(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}\cdot e^x-\frac{b}{x^2}\cdot e^{x-1}+\frac{b}{x}\cdot e^{x-1}$，由题意可得$f(1)=2$，$f'(1)=e$，故 $a=1$，$b=2$；

(2)由(1)知，$f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}\cdot e^{x-1}$，要证 $f(x)>1$，，只需 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}\Rightarrow x\ln x+\frac{1}{e}>xe^{-x}-\frac{1}{e}$，只需 $x\ln x+\frac{1}{e}>-\left(-xe^{-x}+\frac{1}{e}\right)=-\left(e^{-x}\ln e^{-x}+\frac{1}{e}\right)$，构造函数 $g(x)=x\ln x+\frac{1}{e}$，显然$g(x)\geqslant0$，当仅当$x=\frac{1}{e}$时等号成立，由于两同构式 $g(x)+g(e^{-x})\geqslant0$ 时，取等条件为 $x=e^{-x}=\frac{1}{e}$，显然不存在，故 $g(x)+g(e^{-x})>0$，即 $f(x)>1$.

专题8　对数平均不等式的应用

达标训练

1. 【解析】证明：$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{2}{x_1}+\ln x_1=\frac{2}{x_2}+\ln x_2\Rightarrow\frac{2}{x_1x_2}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}<\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\Rightarrow x_1x_2>4$，$x_1+$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$x_2>2\sqrt{x_1x_2}>4$.

2. 【解析】(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax=0\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2a}}(a>0)$，若$f(x)$有两个零点，则$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，所以$0<a<\frac{1}{2e}$；

(2)$f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，$\begin{cases}\ln x_1=\frac{1}{2}x_1^2+m①\\ \ln x_2=\frac{1}{2}x_2^2+m②\end{cases}$

①－②得$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{2}{x_1+x_2}\Rightarrow x_1+x_2>2$.

3. 【解析】证明：$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，当$a>0$时，$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1<0$，所以$a>\frac{1}{e}$；$\begin{cases}\ln x_1=ax_1①\\ \ln x_2=ax_2②\end{cases}$，①－②得$a(x_1-x_2)=\ln x_1-\ln x_2$③；①－②得$a(x_1+x_2)=\ln x_1x_2$④，$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=a=\frac{\ln x_1x_2}{x_1+x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$，所以$x_1x_2>e^2$.

4. 【解析】证明：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{(x+1)(x-a)}{x}$，显然$a\leqslant 0$时，不符合题意，$a>0$时，当$x\in(0,a)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；所以$f(x)$有极小值$f(a)<0\Rightarrow\ln a>1-\frac{1}{2}a\Rightarrow 1<a<2$，令$0<x_1<x_2$，

$\begin{cases}a\ln x_1=\frac{1}{2}x_1^2-(1-a)x_1①\\ a\ln x_2=\frac{1}{2}x_2^2-(1-a)x_2②\end{cases}$

①－②得：$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{2-2a+(x_1+x_2)}{2a}>\frac{2}{x_1+x_2}(x_1+x_2)^2+2(1-a)(x_1+x_2)-4a>0(x_1+x_2+2)(x_1+x_2-2a)>0\Rightarrow x_1+x_2>2a>2$.

5. 【解析】(1)$a<1$；求导或者切线放缩可得；

(2)设$t=e^x$所以$x=\ln t$则原函数有两个零点可转化为$\ln t-at+1=0$有两个根t_1，$t_2(t_1<t_2)$，要证明$e^{x_1}+e^{x_2}>2$，只要$t_1+t_2>2$即可；

$\begin{cases}\ln t_1=at_1-1①\\ \ln t_2=at_2-1②\end{cases}$

①－②得：$\frac{\ln t_1-\ln t_2}{t_1-t_2}=a>\frac{2}{t_1+t_2}\Rightarrow t_1+t_2>\frac{2}{a}>2$.

6. 【解析】$f'(x)=2x-2+ae^x=0$有两个根，则$f''(x)=2+ae^x=0\Rightarrow x=\ln\left(-\frac{2}{a}\right)(a<0)$，此时

$\begin{cases}f'(x_1)=2x_1-2+ae^{x_1}=0\\ f'(x_2)=2x_2-2+ae^{x_2}=0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x_1=\ln\frac{2}{-a}+\ln(x_1-1)①\\ x_2=\ln\frac{2}{-a}+\ln(x_2-1)②\end{cases}$

①－②得：$\frac{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}{(x_1-1)-(x_2-1)}=1>\frac{2}{x_1+x_2-2}$，所以$x_1+x_2>4$.

7. 【解析】证明：$f'(x)=e^x-a$，当$f'(x)=0$时，$x=\ln a$，$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，所以$f(\ln a)<0$，$a>e^2$；

$\begin{cases}f(x_1)=e^{x_1}-ax_1+a=0\\ f(x_2)=e^{x_2}-ax_1+a=0\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}x_1=\ln a+\ln(x_1-1)①\\ x_2=\ln a+\ln(x_2-1)②\end{cases}$

①－②得：$\frac{\ln(x_1-1)-\ln(x_2-1)}{(x_1-1)-(x_2-1)}=1<\frac{1}{\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}}$，即$1>\sqrt{(x_1-1)(x_2-1)}\Rightarrow x_1x_2<x_1+x_2$；

①＋②得：$x_1+x_2=2\ln a+\ln(x_1-1)(x_2-1)<2\ln a$，所以$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\ln a\Rightarrow f'\left(\sqrt{x_1x_2}\right)=$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$e^{\sqrt{x_1x_2}}-a<e^{\ln a}-a=0.$

8. 【解析】(1)$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x(x+a)}-\ln x}{(x+a)^2}$，$f'(1)=1$

所以 $a=0$. 所以 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 当$f'(x)=0$时，$x=e$，故$f(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减. 所以$\dfrac{\ln2016}{2016}>\dfrac{\ln2017}{2017}$. 所以$e^{\frac{\ln2016}{2016}}>e^{\frac{\ln2017}{2017}}$，即$\sqrt[2016]{2016}>\sqrt[2017]{2017}$，所以$2016^{2017}>2017^{2016}$；

(2)由(1)得，$f(x)_{max}=f(e)=\dfrac{1}{e}$，所以$g(x)=f(x)-k=0$，所以$k=\dfrac{1}{e}$.

即$\begin{cases}\dfrac{\ln x_1}{x_1}=k\\ \dfrac{\ln x_2}{x_2}=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln x_1=kx_1①\\ \ln x_2=kx_2②\end{cases}$，①－②得：$k(x_1-x_2)=\ln x_1-\ln x_2$③；①＋②得：$k(x_1+x_2)=\ln x_1x_2$④；$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=k=\dfrac{\ln x_1x_2}{x_1+x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，所以$x_1x_2>e^2$.

9. 【解析】(1)$f'(x)=\dfrac{a(\ln x-1)}{\ln^2x}$，所以$f'(e^2)=\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{4}$，得：$a=1$，所以令$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2x}<0$，得：$x\in(0,1)\cup(1,e)$，即$f(x)$的单调区间为$(0,1)$和$(1,e)$；

(2)由$\begin{cases}\ln x_2=ax_2\\ \ln x_1=ax_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)\\ \ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)\end{cases}$，

所以$\dfrac{2}{x_1+x_2}<a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\ln x_1x_2}{x_1+x_2}\Rightarrow\ln x_1x_2>2x_1x_2>e^2$；因为$x_1+x_2>2\sqrt{x_1\cdot x_2}$，所以$x_1+x_2>2\sqrt{x_1\cdot x_2}>2e$.

10. 【解析】证明：$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2bx$，当$a=2$时，$f'(2)=-3\Rightarrow b=1$，$g(x)=2\ln x-x^2-kx$；

$\begin{cases}g(x_1)=2\ln x_1-x_1^2-kx_1=0①\\ g(x_2)=2\ln x_2-x_2^2-kx_2=0②\end{cases}$

①－②得：$2(\ln x_1-\ln x_2)-(x_1^2-x_2^2)-k(x_1-x_2)=0$；

同除以(x_1-x_2)得：$\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-(x_1+x_2)-k=0$；$g'(x_0)=\dfrac{2}{x_0}-2x_0-k=\dfrac{4}{x_1+x_2}-(x_1+x_2)-k$，要证$g'(x_0)<0$，只需证$\dfrac{4}{x_1+x_2}<\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$，此正好为对数平均不等式，命题得证.

11. 【解析】(1)欲证$x+1-\dfrac{2(x-1)}{f(x)}>0$，令$K(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}>0$，因为$K'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，所以$K(x)$在$(1,+\infty)$上递增，所以$K(x)>K(1)=0$；

(2)因为$x>1$，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，取$x=\dfrac{x_2}{x_1}\Rightarrow\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

$\begin{cases}\ln x_1+x_1-ax_1^2=0\\ \ln x_2+x_2-ax_2^2=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\dfrac{1}{a(x_1+x_2)-1}<\dfrac{x_1+x_2}{2}\Rightarrow\dfrac{2}{x_1+x_2}-[a(x_1+x_2)-1]<0.$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}+1-2ax$，$g'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{2}{x_1+x_2}-[a(x_1+x_2)-1]<0$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2a<0$，$g'(x)$在$(0,+\infty)$上递减，因为$\dfrac{x_1+2x_2}{3}>\dfrac{x_1+x_2}{2}$，所以$g'\left(\dfrac{x_1+2x_2}{3}\right)<g'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<0.$

12. 【解析】证明：$g(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}x^2-x$，$(x>0)$，$g'(x)=\ln x-ax$ 设，$h(x)=\ln x-ax$，$(x>0)$，

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$h'(x)=\frac{1-ax}{x}$；①当$a\leqslant 0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$单调x递增，不符合题意；②当$a>0$时，若$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$h'(x)>0$，$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，若$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，$h'(x)<0$，$h(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$单调递减，所以$h(x)\leqslant h\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1$，依题意$h(x)$有两根不同的零点$x_1$，$x_2$，不妨设$0<x_1<x_2$. 所以$\ln\frac{1}{a}-1>0$，所以$a<\frac{1}{e}$. 所以$2ae<2$要证明$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2ae$，只要证明$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}>2$即可，由上可知：$\begin{cases}\ln x_1=ax_1①\\ \ln x_2=ax_2②\end{cases}$ ①+②得：$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$，且①-②得：$\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$，所以$\frac{1}{a}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}}{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)}$，所以$\frac{1}{\ln x_1}+\frac{1}{\ln x_2}=\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=\frac{1}{\ln\frac{x_1}{x_2}}\cdot\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)$，设$t=\frac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，故只要$\frac{1}{\ln t}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)>2$，即$2t\ln t-t^2+1>0$即可，令$m(t)=2t\ln t-t^2+1$，$t\in(0,1)$. $m'(t)=2(\ln t-t+1)$易知$m'(t)$在$(0,1)$单调递增；所以$m'(t)<m(1)=0$，$m(t)$在$(0,1)$单调递减，所以$m(t)>m(1)=0$即$2t\ln t-t^2+1>0$，所以原结论得证.

13. 【解析】思路分析：先证明$f(x)=0$有两个零点时，$a>1$，由于和对均的符号属于反向，故需要先作差求出$x_1+x_2>2a$，再求和构造出含有$\ln x_1x_2+\frac{2x_1x_2}{a}=\frac{(x_1+x_2)^2+(1-2a)(x_1+x_2)}{a}$的式子，再构造函数和放缩得出$x_1x_2>1$；

证明：$f'(x)=2x+1-2a-\frac{a}{x}=\frac{2x^2+(1-2a)x-a}{x}=\frac{(2x+1)(x-a)}{x}=0$时，$x=-\frac{1}{2}$(舍)或$x=a$，

①当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故不存在两个零点；②当$a>0$时，$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，由于$x\to 0$时，$-a\ln x\to+\infty$，此时$f(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$时，$\ln x<x-1$，$f(x)>x^2+(1-3a)x+a$此时$f(x)\to+\infty$，故$f(x)_{\min}=f(a)<0\Rightarrow a-a^2-a\ln a<0\Rightarrow 1-a<\ln a\Rightarrow a>1$，存在两个零点；根据题意可知$x_1>1>x_2>0$，$\begin{cases}x_1^2+(1-2a)x_1-a\ln x_1=0①\\ x_2^2+(1-2a)x_2-a\ln x_2=0②\end{cases}$，

①-②得：$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(1-2a)(x_1-x_2)-a(\ln x_1-\ln x_2)=0$，同时除以$(x_1-x_2)$可得：

解法一：(整体代换)$0=(x_1+x_2)+(1-2a)-a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<(x_1+x_2)+(1-2a)-a\cdot\frac{2}{x_1+x_2}$，

所以$(x_1+x_2)^2+(1-2a)(x_1+x_2)>2a$，

①+②得：

$\ln x_1x_2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+(1-2a)(x_1+x_2)}{a}$，

所以$\ln x_1x_2+\frac{2x_1x_2}{a}=\frac{(x_1+x_2)^2+(1-2a)(x_1+x_2)}{a}>\frac{2a}{a}=2$；因为$a>1$，所以$\ln x_1x_2+2x_1x_2>\ln x_1x_2+\frac{2x_1x_2}{a}>2$，构造$h(x)=\ln x+2x-2$，易知$h(x)>h(1)>0$，所以$x_1x_2>1$.

解法二：$0=(x_1+x_2)+(1-2a)-a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<(x_1+x_2)+(1-2a)-a\cdot\frac{2}{x_1+x_2}$

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

$\Rightarrow x_1 + x_2 > 2a$；①＋②得：$\ln x_1 x_2 = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 + (1-2a)(x_1+x_2)}{a}$，

所以 $\ln x_1 x_2 + \frac{2x_1x_2}{a} = \frac{(x_1+x_2)^2 + (1-2a)(x_1+x_2)}{a}$，

由于 $x_1 + x_2 > 2a$，故构造 $g(x) = x^2 + (1-2a)x$，当 $x > -\frac{1-2a}{2} = a - \frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 单调递增，

故 $g(x_1+x_2) > g(2a) = 2a$，所以 $\ln x_1 x_2 + \frac{2x_1x_2}{a} > 2$，因为 $a > 1$，所以 $\ln x_1 x_2 + 2x_1x_2 > \ln x_1 x_2 + \frac{2x_1x_2}{a} > 2$，构造 $h(x) = \ln x + 2x - 2$，易知 $h(x) > h(1) > 0$，所以 $x_1 x_2 > 1$.

专题9　数形结合破解公切线问题

⬅⬅⬅达标训练

1. D　【解析】由已知，$f(1) = b = 2$，$g(1) = 1 + c = 2$，所以 $c = 1$. 由 $f'(x) = \frac{a}{x}$ 得 $f'(1) = a$，由 $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} + 1$，得 $g'(1) = 1$，所以 $a = 1$，所以 $a + b + c = 1 + 2 + 1 = 4$，故选 D.

2. D　【解析】由题意得，$f(x) = \ln x$ 的导数为 $f'(x) = \frac{1}{x}$，$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2}(m < 0)$ 的导数为 $g'(x) = x + m$，所以与 $f(x)$ 图像的切点为 $(1, f(1))$ 的切线 l 的斜率 $k = f'(1) = 1$，且 $f(1) = \ln 1 = 0$，所以切点为 $(1, 0)$，所以直线 l 的方程为：$y = x - 1$，因为直线 l 与 $g(x)$ 的图像也相切，所以 $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 + mx + \frac{7}{2} \end{cases}$，此方程组只有一解，即 $\frac{1}{2}x^2 + (m-1)x + \frac{9}{2} = 0$ 只有一解，所以 $\Delta = (m-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = 0$，解得 $m = -2$ 或 $m = 4$（舍去），故选 D.

3. C　【解析】$f'(x) = \frac{1}{x}$，$g'(x) = 2ax$ 因为函数 $f(x) = \ln x$ 与函数 $g(x) = ax^2 - a$ 的图像在点 $(1, 0)$ 的切线相同，所以 $1 = 2a$，所以 $a = \frac{1}{2}$，故选 C.

4. D　【解析】设切线方程是：$y = kx + b$，切线与 $y = \ln x + 2$ 和 $y = \ln(x+1)$ 的切点分别为 $(x_1, kx_1 + b)$、$(x_2, kx_2 + b)$；由导数的几何意义可得 $k = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2 + 1}$，得 $x_1 = x_2 + 1$，再由切点也在各自的曲线上，得 $\begin{cases} kx_1 + b = \ln x_1 + 2 \\ kx_2 + b = \ln(x_2 + 1) \end{cases}$，联立上述式子解得 $k = 2$，故选 D.

5. C　【解析】设直线 l：$y = kx$. 因为 $y' = 3x^2 - 6x + 2$，所以 $y'|_{x=0} = 2$，又因为直线与曲线均过原点，于是直线 $y = kx$ 与曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 相切于原点时，$k = 2$. 直线 l 的方程为 $2x - y = 0$，若直线与曲线 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ 切于点 $(x_0, y_0)(x_0 \neq 0)$，则 $k = \frac{y_0}{x_0}$，因为 $y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0$，所以 $\frac{y_0}{x_0} = x_0^2 - 3x_0 + 2$，又因为 $k = y'|_x = 2x_0 = 3x_0^2 - 6x_0 + 2$，所以 $x_0^2 - 3x_0 + 2 = 3x_0^2 - 6x_0 + 2$，所以 $2x_0^2 - 3x_0 = 0$，因为 $x_0 \neq 0$，所以 $x_0 = \frac{3}{2}$，所以 $k = x_0^2 - 3x_0 + 2 = -\frac{1}{4}$，直线 l 的方程为 $x + 4y = 0$. 直线 l 的方程为 $2x - y = 0$ 与 $y = x^2 + a$ 联立，可得 $x^2 - 2x + a = 0$，其中 $\Delta = 0$，即 $(-2)^2 - 4a = 0$，解得 $a = 1$；直线 l 的方程为 $x + 4y = 0$ 与 $y = x^2 + a$ 联立，可得 $x^2 + \frac{1}{4}x + a = 0$，其中 $\Delta = 0$，即 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4a = 0$，解得 $a = \frac{1}{64}$，故选 C.

6. A　【解析】$f'(x) = 6x - 4a$，$g'(x) = \frac{2a^2}{x}$，由题意 $\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases}$，

获取更多资料加qq群698274639

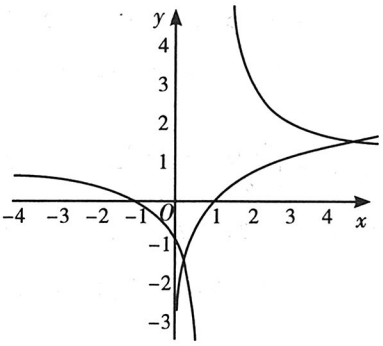
获取更多资料加qq群698274639

可得$\begin{cases}6x_0-4a=\dfrac{2a^2}{x_0}① \\ 3x_0^2-4ax_0=2a^2\ln x_0+b② \end{cases}$，

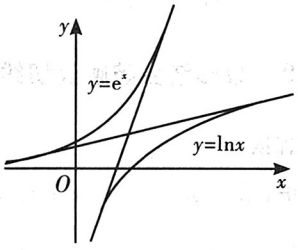
由①得$3x_0^2-2ax_0-a^2=0$，解得$x_0=a$或$x_0=-\dfrac{1}{3}a$（舍去），代入②得，$-b=2a^2\ln a+a^2$，构造$h(x)=2x^2\ln x+x^2(x>0)$，$h'(x)=4x(\ln x+1)$，则$h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，即$-b=h(x)$的最小值为$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e^2}$，所以$b$的最大值为$\dfrac{1}{e^2}$，故选A.

7. D 【解析】将此题转化为$y=e^a\cdot e^x$与$y=x^2$的交点问题，由于两个函数都是凹函数，且位于递增区间，故类比两相交圆外公切线原理，则当它们有共点公切线时，仅存在一条公切线，此时$e^a\cdot e^{x0}=2x_0=x_0{}^2\Rightarrow x_0=2$，$a=2\ln 2-2$，当$a<2\ln 2-2$时，指数函数$y=\dfrac{4}{e^2}\cdot e^x$函数向右平移，在二次函数递增区间一定有两个交点，所以答案为D.

8. C 【解析】解法一：因为$f(x)=\ln x$，所以$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以$x=x_0$，$f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$，所以切线l的方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，即$y=\dfrac{1}{x_0}x+\ln x_0-1①$，设直线$l$与曲线$y=g(x)$相切于点$(x_1,e^{x1})$，因为$g'(x)=e^x$，所以$e^{x1}=\dfrac{1}{x_0}$，所以$x_1=-\ln x_0$. 所以直线$l$也为$y-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}(x+\ln x_0)$，即$y=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{\ln x_0}{x_0}+\dfrac{1}{x_0}②$，由①②得$\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，作出$y=\ln x$和$y=\dfrac{x+1}{x-1}$的图像，如图所示，图像有两个交点，方程有两解，故选C.



解法二：如图所示，作出$y=e^x$和$y=\ln x$图像，可知属于一凹一凸型的，且均位于单调增区间，故两曲线没有交点时类比两圆的相离时内公切线模型，一定有两条公切线，故选C.



9. D

10. B 【解析】设l是曲线C_1和曲线C_2的公共切线，切点分别是(t,t^2)，$(m,\ln m)$，则$2t=\dfrac{1}{m}=\dfrac{\ln m-t^2}{m-t}$，$\ln(2t)-t^2+1=0\left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，令$f(x)=\ln 2x-x^2+1$，$f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{x}$，所以当$x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$增函数，当$x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，$f(x)$在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$减函数，$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)=-1-\dfrac{1}{4e^2}+1<0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，$f(x)=\ln 2x-x^2+1$，在$\left(\dfrac{1}{2e},\dfrac{1}{2}\right)$存在唯一零点，故选B.

11. B 【解析】设直线l与曲线$y=e^x$切点为(m,n)，$y=e^x$的导数为$y'=e^x$，$y=e^{2x}-2$的导数为$y'=2e^{2x}$，曲线$y=e^x$在(m,n)的切线的方

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

程为 $y-e^m=e^m(x-m)$，可得 $y=e^m(x-m+1)$，曲线 $y=e^{2x}-2$ 在点 (a,b) 处的切线方程为 $y-(e^{2a}-2)=2e^{2a}(x-a)$，即 $y=2e^{2a}x+e^{2a}(1-2a)-2$，可得 $e^m=2e^{2a}$，$e^m(-m+1)=e^{2a}(1-2a)-2$，则 $m=2a+\ln 2$，即有 $2e^{2a}[1-2a-\ln 2)=e^{2a}(1-2a)-2$，即 $e^{2a}(2a+2\ln 2-1)-2=0$，即有 $f(x)=e^{2x}(2x+2\ln 2-1)-2$，故选 B.

12. D 【解析】由 $f(x)=-e^x-x$，得 $f'(x)=-e^x-1$，因为 $e^x+1>1$，所以 $\frac{1}{1+e^x}\in(0,1)$，由 $g(x)=(x-1)a+2\cos x$，得 $g'(x)=a-2\sin x$，又 $-2\sin x\in[-2,2]$，所以 $a-2\sin x\in[-2+a,2+a]$，要使过曲线 $f(x)=-e^x-x+3a$ 上任意一点的切线为 l_1，总存在过曲线 $g(x)=a(x-1)+2\cos x$ 上一点处的切线 l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则 $\begin{cases}a-2\leqslant 0\\ a+2\geqslant 1\end{cases}$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 2$. 即 a 的取值范围为 $[-1,2]$，故选 D.

13. A 【解析】常规解法：$f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=2x+2$，设与 $g(x)=x^2+2x+a$ 相切的切点为 (s,t)，$s<0$，与曲线 $f(x)=\ln x$ 相切的切点为 (m,n) $m>0$，则有公共切线斜率为 $2s+2=\frac{1}{m}=\frac{n-t}{m-s}$，又 $t=s^2+2s+a$，$n=\ln m$，即有 $a=s^2-1+\ln(2s+2)$，设 $f(s)=s^2-1-\ln(2s+2)(-1<s<0)$，所以 $f'(s)=\frac{2s^2+2s-1}{s+1}<0$，所以 $f(s)>f(0)=-\ln 2-1$，所以 $a>-\ln 2-1$，因为 $s\in(-1,0)$，且趋近与 1 时，$f(s)$ 无限增大，所以 $a>-\ln 2-1$，故选 A.

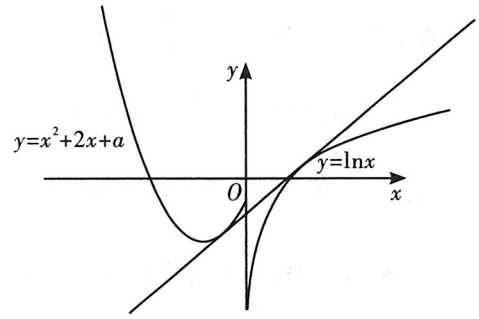


图 1

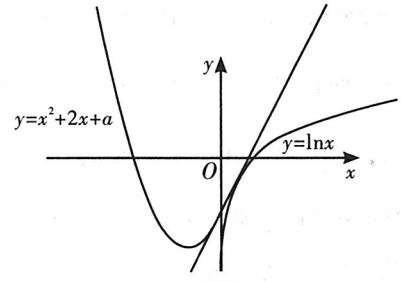


图 2

秒杀解法：由于 $f(x)$，$g(x)$ 为一凹一凸，类比于两圆的内公切线，根据图 1，图 2 可得，切线切 $g(x)$ 于区间 $(-1,0)$，而 $g'(x)=2x+2$ 在区间 $(-1,0)\uparrow$，则切线斜率越来越大，故当 $x=0$ 时，$k=g'(0)=2=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$，此时的公切线方程为 $y+\ln 2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x=0$ 时 $y=-1-\ln 2$，所以 $a>-\ln 2-1$，故选 A.

14. A 【解析】常规解法：当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+x+a$ 的导数为 $f'(x)=2x+1$；当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，设 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$ 为该函数图像上的两点，且 $x_1<x_2$，当 $x_1<x_2<0$，或 $0<x_1<x_2$ 时，$f'(x_1)\neq f'(x_2)$，故 $x_1<0<x_2$，当 $x_1<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $A(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为：$y-(x_1^2+x_1+a)=(2x_1+1)(x-x_1)$；当 $x_2>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $B(x_2,f(x_2))$ 处的切线方程为：$y-\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{x_2^2}(x-x_2)$. 两直线重合的充要

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

条件是 $-\frac{1}{x_2^2}=2x_1+1$①，$\frac{2}{x_2}=-x_1^2+a$②，两直线重合的充要条件是 $-\frac{1}{x_2^2}=2x_1+1$①，$\frac{2}{x_2}=a-x_1^2$②，由①②令 $t=\frac{1}{x_2}$，则 $t>0$，且 $a=\frac{1}{4}(t^4+2t^2+8t+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，所以 $a>\frac{1}{4}$，故选 A.

秒杀解法：如图 1 所示，无公切线，由于 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，根据公切线导数值相等的原理，公切线只会出现在单调性一致的区间，故只能出现在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 和 $(0,+\infty)$，由于函数在这两个区间属于凹函数，故可类比两圆相离的外公切线，在 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 时取得最小值时，也能作得切线与 $y=\frac{1}{x}$ 部分相切，由于 $x\to+\infty$，$y\to0$ 则 $f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$，如图 2，则 $a>\frac{1}{4}$，故选 A.

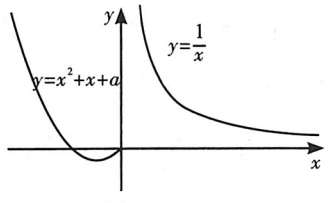


图 1

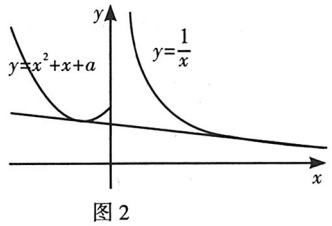


图 2

15. B 【解析】求出两曲线在公共点的切线，两凹函数类比两圆外公切线定理，设它们相切时公共切点的横坐标为 x_0，则 $e^{x_0+a}=2(x_0-1)=(x_0-1)^2\Rightarrow x_0=3$，$a=2\ln2-3$，故根据图像，$y=4e^{x-3}$ 往右平移时，一定会和函数 $y=(x-1)^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 有两个交点，故选 B.

16. 【解析】设公共点的坐标为 $\left(m,\frac{1}{2}\ln m\right)$，则函数 $y=f(x)=a\sqrt{x}(a>0)$ 的导数 $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}$，曲线 $y=g(x)=\frac{1}{2}\ln x$ 的导数 $g'(x)=\frac{1}{2x}$，则 $f'(m)=\frac{a}{2\sqrt{m}}$，$g'(m)=\frac{1}{2m}$，则由 $f'(m)=g'(m)$，得 $\frac{a}{2\sqrt{m}}=\frac{1}{2m}(m>0)$，则 $a=\frac{1}{\sqrt{m}}$，又 $a\sqrt{m}=\ln\sqrt{m}$，即 $\ln\sqrt{m}=a\sqrt{m}=a\sqrt{m}\times\frac{1}{\sqrt{m}}=1$，得 $\sqrt{m}=e$，则 $a=\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{e}$，故答案为 $\frac{1}{e}$.

17. 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\ln x+\frac{mx}{x+1}$ 与 $g(x)=x^2+1$ 有公切线 $y=ax(a>0)$，设切点分别为为 $F(x_1,y_1)$，$G(x_2,y_2)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{m}{(x+1)^2}$，$g'(x)=2x$；所以 $a=2x_2>0$ 且 $\frac{x_2^2+1}{x_2}=2x_2\Rightarrow x_2=1$，$a=2$，所以公切线为 $y=2x$，则有 $\begin{cases}\ln x_1+\frac{mx_1}{x_1+1}=2x_1\\ \frac{1}{x_1}+\frac{m}{(x_1+1)^2}=2\end{cases}\Rightarrow\ln x_1+2x_1^2-x_1-1=0$，设 $h(x)=\ln x+2x^2-x-1(x>0)\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{x}+4x-1>0\Rightarrow h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 增，又 $h(1)=0\Rightarrow x_1=1$，$m=4$，故答案为 4.

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639

获取更多资料加qq群698274639