

## 专题 2 多面体的外接球

## 第一讲 长方体切割体的外接球

设长方体相邻的三条边棱长分别为  $a, b, c$ .

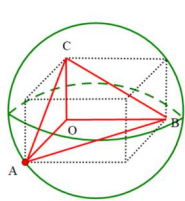


图 1 墙角体

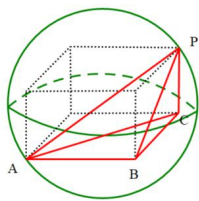


图 2 鳖臑

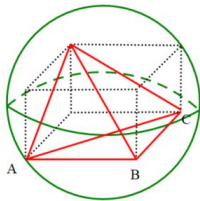


图 3 挖墙角体

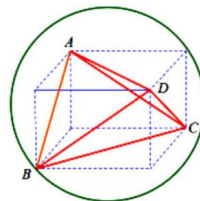


图 4 对角线相等的四面体图

1 与图 2 有重垂线，三视图都是三个直角三角形，图 3 无重垂线，俯视图是一矩形， $AC$  为虚线，主视图和左视图为直角三角形。

$$\text{图 4 中, } \begin{cases} AD=BC \\ AB=CD \\ AC=BD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=BC^2=\alpha^2 \\ b^2+c^2=AC^2=\beta^2 \\ c^2+a^2=AB^2=\gamma^2 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8}},$$

$$V_{A-BCD} = abc - \frac{1}{6}abc \times 4 = \frac{1}{3}abc.$$

【例 1】在球面上有四个点  $P, A, B, C$ . 如果  $PA, PB, PC$  两两互相垂直，且  $PA = PB = PC = a$ ，则这个球的表面积是\_\_\_\_\_.

【解析】根据题意可得， $P, A, B, C$  位于一个棱长为  $a$  的正方体上，所以球为正方体的外接球， $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，故这个球的表面积为  $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 3\pi a^2$ .

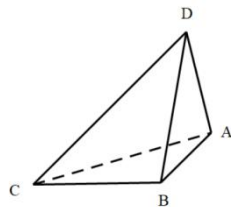
【例 2】在三棱锥  $A-BCD$  中，侧棱  $AB, AC, AD$  两两垂直， $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ADB$  的面积分别为  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则三棱锥  $A-BCD$  的外接球的体积为 ( )

- A.  $\sqrt{6}\pi$       B.  $2\sqrt{6}\pi$       C.  $3\sqrt{6}\pi$       D.  $4\sqrt{6}\pi$

【解析】因为  $ab = 2S_1, bc = 2S_2, ac = 2S_3 \Rightarrow a^2 = \frac{S_1 S_3}{S_2}, b^2 = \frac{S_1 S_2}{S_3}, c^2 = \frac{S_2 S_3}{S_1}$ ， $R = \sqrt{\frac{S_1 S_3}{2S_2} + \frac{S_1 S_2}{2S_3} + \frac{S_2 S_3}{2S_1}}$   
 $= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$ ，故选 A.

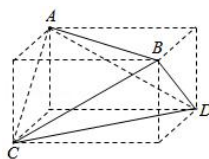
【例 3】如图所示，已知球  $O$  的面上有四点  $A, B, C, D$ ， $DA \perp$  面  $ABC$ ， $AB \perp BC$ ， $DA = AB = BC = \sqrt{2}$ ，则球  $O$  的体积等于\_\_\_\_\_.

【解析】易知  $DA, AB, BC$  位于一个正方体上，故球  $O$  半径为  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$ .



【例 4】四面体  $A-BCD$  中， $AB = CD = 5$ ， $AC = BD = \sqrt{34}$ ， $AD = BC = \sqrt{41}$ ，则四面体  $A-BCD$  外接球的表面积为 ( )

- A.  $50\pi$       B.  $100\pi$   
C.  $150\pi$       D.  $200\pi$



【解析】由题四面体  $A-BCD$  是分别以  $a, b, c$  为长且侧棱两两垂直的三棱锥，从而可得到一个长、宽、高分别为  $a, b, c$  的长方体，并且  $a^2 + b^2 = 25, a^2 + c^2 = 34, b^2 + c^2$ ，设球半径为  $R$ ，则有  $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 50$ ， $\therefore 4R^2 = 50$ ， $\therefore$  球的表面积为  $S = 4\pi R^2 = 50\pi$ 。故选 A.

## 基础自测

1. 三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AC \perp BC$ ,  $AC = BC = 1$ ,  $PA = \sqrt{3}$ , 则该三棱锥外接球的表面积为 ( )  
A.  $5\pi$                       B.  $\sqrt{2}\pi$                       C.  $20\pi$                       D.  $4\pi$
2. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA = BC = 4$ ,  $PB = AC = 5$ ,  $PC = AB = \sqrt{11}$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的表面积为 ( )  
A.  $8\pi$                       B.  $12\pi$                       C.  $26\pi$                       D.  $24\pi$
3. 已知三棱锥  $P-ABC$  的顶点都在球  $O$  的表面上, 若  $PA, PB, PC$  两两互相垂直, 且  $PA = PB = PC = 2$ , 则球  $O$  的体积为 ( )  
A.  $12\sqrt{3}\pi$                       B.  $8\sqrt{2}\pi$                       C.  $4\sqrt{3}\pi$                       D.  $4\pi$
4. 《九章算术》中, 将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑. 若三棱锥  $P-ABC$  为鳖臑,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $PA = AB = 2$ ,  $AC = 4$ , 三棱锥  $P-ABC$  的四个顶点都在球  $O$  的球面上, 则球  $O$  的表面积为 ( )  
A.  $8\pi$                       B.  $12\pi$                       C.  $20\pi$                       D.  $24\pi$
5. 已知三棱锥  $P-ABC$  的各顶点都在同一球面上, 且  $PA \perp$  平面  $ABC$ , 若该棱锥的体积为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $AB = 2$ ,  $AC = 1$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ , 则此球的表面积等于 ( )  
A.  $5\pi$                       B.  $8\pi$                       C.  $16\pi$                       D.  $20\pi$
6. 已知三棱锥  $S-ABC$  的各顶点都在一个半径为  $r$  的球面上, 且  $SA = SB = SC = 1$ ,  $AB = BC = AC = \sqrt{2}$ , 则球的表面积为 ( )  
A.  $12\pi$                       B.  $8\pi$                       C.  $4\pi$                       D.  $3\pi$
7. 三棱锥  $P-ABC$  的四个顶点都在球  $O$  的球面上, 已知  $PA, PB, PC$  两两垂直,  $PA = 1$ ,  $PB + PC = 4$ , 当三棱锥的体积最大时, 球  $O$  的体积为 ( )  
A.  $36\pi$                       B.  $9\pi$                       C.  $\frac{9\pi}{2}$                       D.  $\frac{9\pi}{4}$
8. 如图所示, 平面四边形  $ABCD$  中,  $AB = AD = CD = 2$ ,  $BD = 2\sqrt{2}$ ,  $BD \perp CD$ , 将其沿对角线  $BD$  折成四面体  $ABCD$ , 使平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ , 若四面体  $ABCD$  的顶点在同一个球面上, 则该球的体积为 ( )  
A.  $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$   
B.  $24\pi$   
C.  $4\sqrt{3}\pi$   
D.  $12\pi$

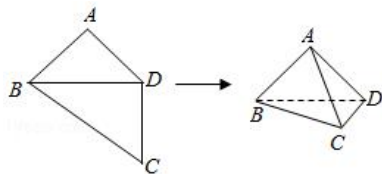


图1

图2

## 第二讲 三棱柱的切割体的外接球

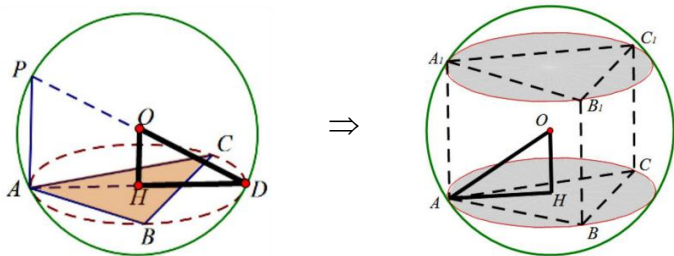


图 1 立着放的模型

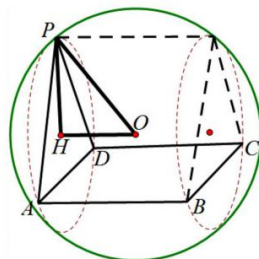


图 2 躺着放的模型

图 1: 立着放的模型一定有重垂线, 且重垂线在底面的射影一定位于底面三个顶点中的一个, 底面三角形非

直角三角形, 将重垂线长度设为  $h$ , 底面三角形外接圆半径设为  $r$ ,  $2r = \frac{a}{\sin A}$  可以求出, 则  $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$ ;

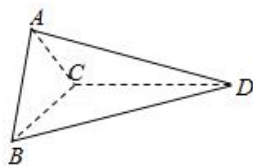
图 2: 躺着放的模型, 底面是直角三角形或者矩形, 侧面非直角三角形, 底面一条棱垂直于侧面,

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

## 第一章 立体几何

【例 5】如图，三棱锥的所有顶点都在一个球面上，在  $\triangle ABC$  中， $AB = \sqrt{3}$ ，

$\angle ACB = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 90^\circ$ ， $AB \perp CD$ ， $CD = 2\sqrt{2}$ ，则该球的体积为\_\_\_\_\_.



【解析】此图可以理解为躺着的三棱柱，以  $\triangle ABC$  所在平面为底面，则由正弦定理得截面圆的半径为  $r = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 1$ ，依题意得  $CD \perp$  平面  $ABC$ ，故  $h = CD = 2\sqrt{2}$ ，则球的半径为  $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ ，所以球的体积为  $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 = 4\sqrt{3}\pi$ .

【例 6】已知如图是一个空间几何体的三视图，则该几何体的外接球的表面积为（ ）

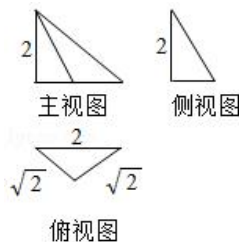
A.  $8\pi$

B.  $16\pi$

C.  $32\pi$

D.  $64\pi$

【解析】此图可以理解为立着的三棱柱，底面为一等腰直角三角形，则由正弦定理得截面圆的半径为  $r = \frac{1}{2} \frac{2}{\sin 90^\circ} = 1$  依题意得  $h = 2$ ，则球的半径为  $R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$  所以球的体积为  $4\pi(\sqrt{2})^3 = 8\pi$ .



9. 如图是某几何体的三视图，正视图是等边三角形，侧视图和俯视图为直角三角形，则该几何体外接球的表面积为（ ）

A.  $\frac{20\pi}{3}$

B.  $8\pi$

C.  $9\pi$

D.  $\frac{19\pi}{3}$

10. 三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥外接球的体积为（ ）

A.  $4\sqrt{3}\pi$

B.  $2\sqrt{3}\pi$

C.  $4\sqrt{2}\pi$

D.  $2\sqrt{2}\pi$

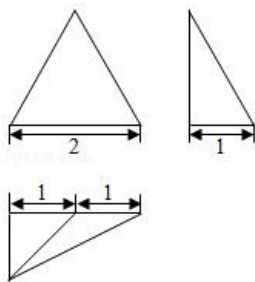
11. 四面体  $ABCD$  的四个顶点都在球  $O$  的表面上， $AB \perp$  平面  $BCD$ ，三角形  $BCD$  是边长为 3 的等边三角形，若  $AB = 4$ ，则球  $O$  的表面积为（ ）

A.  $36\pi$

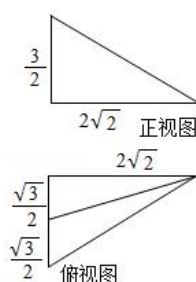
B.  $28\pi$

C.  $16\pi$

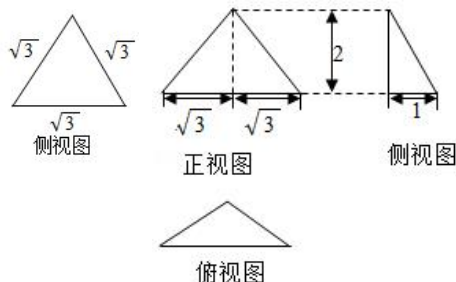
D.  $4\pi$



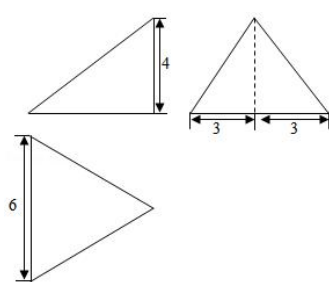
第 9 题图



第 10 题图



第 12 题图



第 13 题图

12. 已知一个三棱锥的三视图如下图所示，其中俯视图是顶角为  $\frac{2\pi}{3}$  的等腰三角形，则该三棱锥外接球的表面积为（ ）

A.  $20\pi$

B.  $17\pi$

C.  $16\pi$

D.  $8\pi$

13. 如图，某三棱锥的正视图、侧视图和俯视图分别是直角三角形、等腰三角形和等边三角形，若该三棱锥的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为（ ）

A.  $27\pi$

B.  $48\pi$

C.  $64\pi$

D.  $81\pi$

14. 已知  $A, B, C, D$  是同一球面上的四个点，其中  $\triangle ABC$  是正三角形， $AD \perp$  平面  $ABC$ ， $AD = 2AB = 6$ ，则该球的体积为（ ）

A.  $32\sqrt{3}\pi$

B.  $48\pi$

C.  $24\pi$

D.  $16\pi$

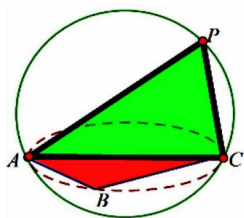
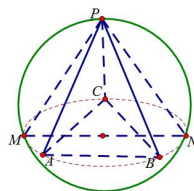
图 1 面  $PAC \perp BAC, AB \perp BC$ 图 2 底面  $ABC$  固定,  $P$  在球面上运动,  $V_{P-ABC}$  最值问题

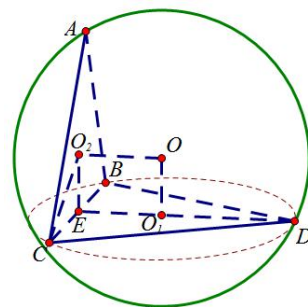
图 1: 由图可知, 小圆  $ABC$  直径  $AC$  长可以求出, 平面  $PAC$  必在大圆上, 由  $2R = \frac{a}{\sin A}$ , 解出  $R$ .

图 2: 先根据  $2r = \frac{a}{\sin A}$  求出底面圆的直径  $MN$ , 再根据几何性质求出球大圆的直径, 最后根据垂径定理算出  $P$  到底面距离的最大值和最小值.

$$\text{双半径单交线公式: } R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$R^2 = OD^2 = OO_1^2 + O_1D^2 = O_2E^2 + O_1D^2$$

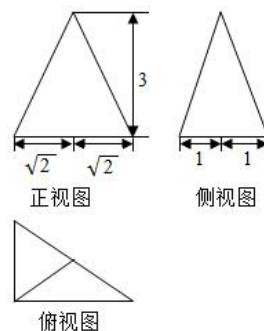
$$= (O_2C^2 - CE^2) + O_1D^2 = O_2C^2 - (\frac{1}{2}BC)^2 + O_1D^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{l^2}{4}$$



**注意:** 常见的切瓜模型中, 一旦出现  $R_1 = \frac{l}{2}$  或  $R_2 = \frac{l}{2}$  时, 则  $R = R_2$  或  $R = R_1$ .

双半径单交线公式适合所有的直二面角模型, 两个半平面的外接圆半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 两半平面交线长度为  $l$ , 此公式属于一种开挂般的存在, 在前面的直三棱柱切割体模型当中也可以使用, 一旦两个半平面的二面角不是  $90^\circ$  时, 此公式将不再适用.

**【例 7】** 某几何体的三视图如图所示, 则它的外接球表面积为 ( )

A.  $12\pi$ B.  $16\pi$ C.  $20\pi$ D.  $24\pi$ 

**【解析】法一:** 由已知中的三视图可得: 该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥,

底面两直角边长分别为 2,  $2\sqrt{2}$ , 故斜边长为  $2\sqrt{3}$ , 过斜边的侧面与底面垂直,

且高为 3 的等腰三角形, 设其外接球的半径为  $R$ , 则  $R^2 = (3-R)^2 + (\sqrt{3})^2$

解得:  $R=2$ , 故它的外接球表面积  $S=4\pi R^2=16\pi$ , 故选 B.

**法二:** 两垂直平面用双半径单交线公式, 由于底面的外接圆半径为  $R_1=\sqrt{3}$ , 与其垂直的面是一个等边三角

形, 其外接圆半径为  $2R_2=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=4$ , 交线  $l=2\sqrt{3}$ , 故  $R^2=R_1^2+R_2^2-\frac{l^2}{4}=2$ , 故选 B.

**【例 8】** 已知三棱锥  $P-ABC$  的四个顶点均在同一个球面上, 底面  $\triangle ABC$  满足  $AB=BC=\sqrt{3}$ ,  $AC=3$ , 若

该三棱锥体积的最大值为  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ , 则其外接球的半径为 ( )

A. 1

B. 2

C. 3

D.  $\frac{2}{3}$ 

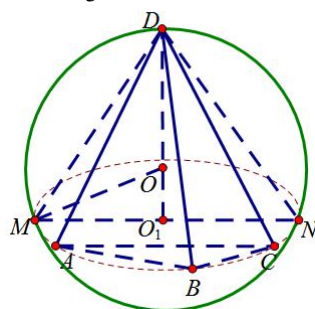
**【解析】** 如图所示, 由  $AB=BC=\sqrt{3}$ ,  $AC=3$ , 可得  $\cos B = \frac{3+3-9}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$

$\therefore B=120^\circ$ ,  $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ , 设  $\triangle ABC$  的外接圆的半径

为  $r$ , 则  $\frac{3}{\sin 120^\circ} = 2r \Rightarrow r = \sqrt{3}$ . 当  $DO_1 \perp$  平面  $ABC$  时, 该三棱锥取得体积的

最大值为  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ , 符合切瓜模型, 满足球顶高最大原理, 由  $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times DO_1$

$\times \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ , 解得  $DO_1 = 3$ . 设三棱锥  $D-ABC$  的外接球的球心为  $O$ ,  $R^2 = (3-R)^2 + (\sqrt{3})^2$ , 解得  $R=2$  故选 B.



## 第一章 立体几何

15. 矩形  $ABCD$  中,  $AB=4$ ,  $BC=3$ , 沿  $AC$  将矩形  $ABCD$  折起, 使面  $BAC \perp$  面  $DAC$ , 则四面体  $A-BCD$

的外接球的体积为 ( )

- A.  $\frac{125}{12}\pi$       B.  $\frac{125}{9}\pi$       C.  $\frac{125}{6}\pi$       D.  $\frac{125}{3}\pi$

16. 点  $A, B, C, D$  在同一个球面上,  $AB=BC=\sqrt{2}$ ,  $AC=2$ , 若球的表面积为  $\frac{25}{4}\pi$ , 则四面体  $ABCD$

体积最大值为 ( )

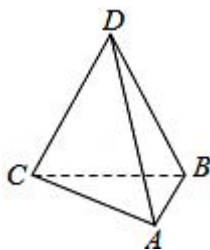
- A.  $\frac{1}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{2}{3}$       D. 2

17. 在四面体  $S-ABC$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AB=BC=\sqrt{2}$ ,  $SA=SC=2$ , 平面  $SAC \perp$  平面  $BAC$ , 则该四面体外接球的表面积为 ( )

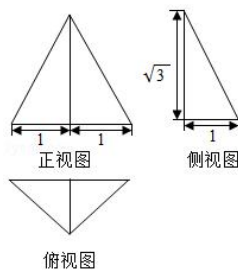
- A.  $\frac{16}{3}\pi$       B.  $8\pi$       C.  $\frac{8}{3}\pi$       D.  $4\pi$

18. 如图所示的三棱锥  $D-ABC$  的四个顶点均在球  $O$  的球面上,  $\triangle ABC$  和  $\triangle DBC$  所在平面相互垂直,  $AB=3$ ,  $AC=\sqrt{3}$ ,  $BC=CD=BD=2\sqrt{3}$ , 则球  $O$  的表面积为 ( )

- A.  $4\pi$       B.  $12\pi$       C.  $16\pi$       D.  $36\pi$



第 4 题图

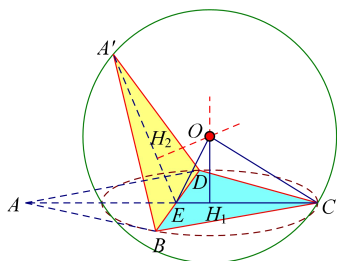


第 5 题图

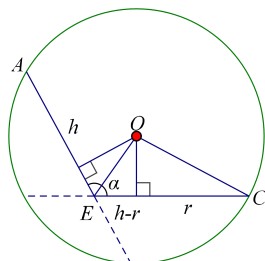
19. 一个几何体的三视图如图所示, 其中正视图是一个正三角形, 则该几何体的外接球的体积为 ( )

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$       B.  $\pi$       C.  $\frac{26}{3}\pi$       D.  $\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$

## 第四讲 全等三角形折叠模型



$\Rightarrow$   
作二面角剖面



题设: 两个全等的三角形或者等腰拼在一起, 或者菱形折叠, 设折叠的二面角  $\angle A'EC = \alpha$ ,  $CE = A'E = h$

如图, 作左图的二面角剖面图如右图:  $H_1$  和  $H_2$  分别为  $\triangle BCD, \triangle A'BD$  外心,  $CH_1 = r = \frac{BD}{2\sin \angle BCD}$ ,

$EH_1 = h - r$ ,  $OH_1 = (h - r)\tan \frac{\alpha}{2}$ , 故  $R^2 = OC^2 = OH_1^2 + CH_1^2 = r^2 + (h - r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$ .

凡是有二面角的四面体, 一定要找到二面角的平面角, 将其作剖面图, 对剖面图进行分析时, 利用圆内接四边形和三角形性质, 可以求出外接球半径, 特殊情况要用  $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  进行处理.

【例 9】已知菱形  $ABCD$  中,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ , 对角线  $AC$  与  $BD$  的交点为  $O$ , 把菱形  $ABCD$  沿对角线  $BD$  折起, 使得  $\angle AOC = 90^\circ$ , 则折得的几何体的外接球的表面积为 ( )

- A.  $15\pi$       B.  $\frac{15\pi}{2}$       C.  $\frac{7\pi}{2}$       D.  $7\pi$

【解析】法一: 菱形  $ABCD$  中,  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $AB = 3$ , 三角形  $ABD$  的外接圆的半径为  $r = \frac{3}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ ,

## 第一章 立体几何

高  $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 对角线  $AC$  与  $BD$  的交点为  $O$ , 使得  $\alpha = \angle AOC = 90^\circ$ , 则折得的几何体的外接球的半径为:

$$R = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 \tan^2 45^\circ} = \frac{\sqrt{15}}{2}, \text{ 外接球的表面积为 } S = 4\pi \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = 15\pi, \text{ 故选 A.}$$

法二: 直二面角符合双半径单交线模型,  $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} \frac{3}{\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ , 且  $\frac{l}{2} = \frac{3}{2}$ , 则一定有  $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{15}{4}$ , 故选 A.

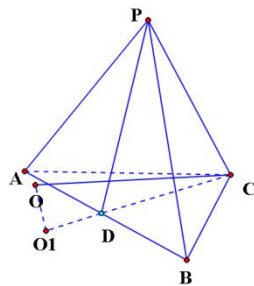
**【例 10】** 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA=PB=AC=BC=2$ ,  $AB=2\sqrt{3}$ ,  $PC=1$ , 则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的表面积为 ( )

A.  $\frac{4\pi}{3}$

B.  $4\pi$

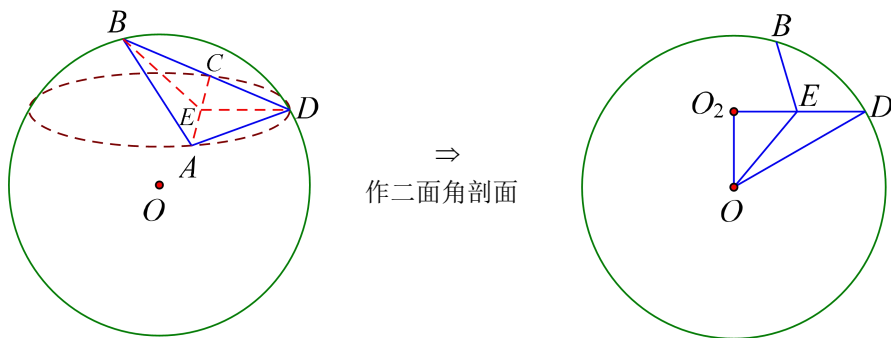
C.  $12\pi$

D.  $\frac{52\pi}{3}$



**【解析】** 取  $AB$  中点  $D$ ,  $\because PA=PB=AC=BC=2$ ,  $\therefore PD=CD=1$ ,  $PD \perp AB$ ,  $CD \perp AB$ ,  $\therefore$  面  $PDC \perp$  面  $ABC$ , 设  $\triangle ABC$  的外心为  $O_1$ , 外接圆半径为  $r$ , 三棱锥  $P-ABC$  的外接球的球心为  $O$ , 则  $OO_1 \perp$  面  $ABC$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ , 由  $r = \frac{AB}{2 \sin 120^\circ} = 2$ ,  $h = 1$ , 设  $\angle PDC = \alpha = 60^\circ$  (二面角平面角), 外接球的半径为  $R$ ,  $R = \sqrt{r^2 + (h-r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{(2)^2 + (1-2)^2 \tan^2 30^\circ} = \sqrt{\frac{13}{3}}$   $\therefore$  则三棱锥  $P-ABC$  的外接球的表面积为  $4\pi R^2 = \frac{52\pi}{3}$ , 故选 D.

**【例 11】** 在边长为  $2\sqrt{3}$  的菱形  $ABCD$  中,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 沿对角线  $AC$  折成二面角  $B-AC-D$  为  $120^\circ$  的四面体  $ABCD$ , 则此四面体的外接球表面积为\_\_\_\_\_.

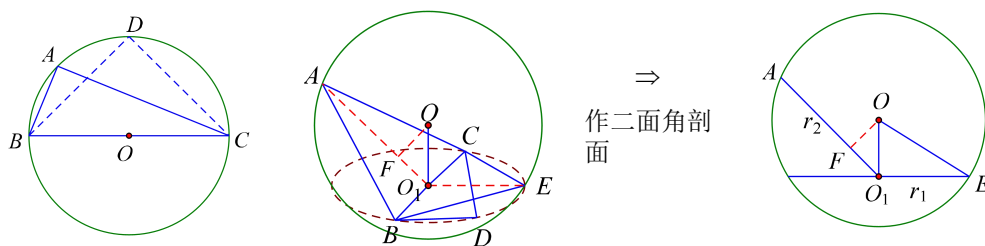


**【解析】** 如图所示, 典型的全等等腰三角形共底边:  $ED = h = \sqrt{3}$ ,  $O_2D = r = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle BED = \alpha = 120^\circ$ , 可根据几何性质知道  $\angle O_2EO = 60^\circ$ ,  $OO_2 = EO_2 \tan 60^\circ = 3$ ,  $R = \sqrt{OO_2^2 + DO_2^2} = \sqrt{(3)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21}$ , 也可以不用画图直接一波流公式带走  $R = \sqrt{r^2 + (h-r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 \tan^2 60^\circ} = \sqrt{21}$ ,  $S = 4\pi R^2 = 84\pi$ .

## 第一章 立体几何

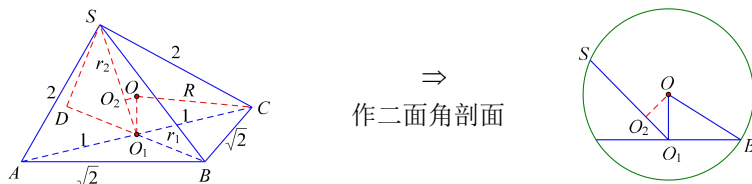
### 第五讲 等腰三角形底边与一直角三角形斜边构成二面角的四面体

凡是遇到直角三角形，通常要转换直角顶点，因为直径所对的圆周角为直角，故可将直角顶点转换为共斜边的直角三角形直角顶点，如下图左： $\triangle ABC$  以斜边  $BC$  为交线与其它平面形成的二面角可以转换为平面  $DBC$  与其它平面构成的二面角。



如上图， $\triangle ABC$  为等腰三角形，且  $AB = AC$ ， $\triangle DBC$  是以  $BC$  为斜边的  $Rt\triangle$ ， $A-BC-D$  二面角为  $\alpha$ ，令  $\triangle ABC$  的外接圆半径为  $r_2$ ， $BC$  边上的高为  $AO_1 = h_2$ ， $BC = 2r_1$ ， $F$  为  $\triangle ABC$  的外心，则根据剖面图可知，外接球半径  $R$  满足以下恒等式  $OE^2 = OO_1^2 + O_1E^2 = R^2 = \left(\frac{h_2 - r_2}{\sin \alpha}\right)^2 + (r_1)^2$ 。

【例 12】在四面体  $S-ABC$  中， $AB \perp BC$ ， $AB = BC = \sqrt{2}$ ， $\triangle SAC$  为等边三角形，二面角  $S-AC-B$  的余弦值为  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则四面体  $S-ABC$  的外接球表面积为\_\_\_\_\_。



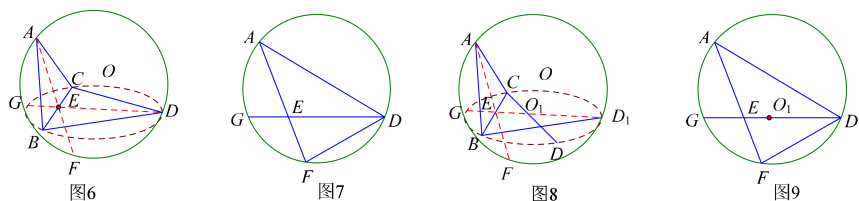
【解析】如图所示，作出剖面： $\cos \angle SO_1B = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin \angle SO_1B = \sin \angle O_2OO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $h_2 = \sqrt{3}$ ， $r_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，直接

刷公式一波流带走  $R^2 = \left(\frac{h_2 - r_2}{\sin \alpha}\right)^2 + (r_1)^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ ， $S = 4\pi R^2 = 6\pi$ 。

### 第六讲 剖面图转化

#### 定理：剖面图一致的外接球一定一致

两个等腰三角形（不全等）共底边的二面角，或等腰三角形底边与直角三角形直角边为公共边构成的二面角模型



如图 6：设二面角  $\angle AED = \alpha$ ， $AE = h_1$ ， $DE = h_2$ ， $\triangle ABC$  外接圆半径  $r_1$ ， $\triangle DBC$  外接圆半径  $r_2$ ，延长  $AE$

交球于  $F$ ， $DE$  交球于  $G$ ，作如图 6 的二面角剖面图如图 7 所示，根据相交弦定理  $|AE| \cdot |EF| = |GE| \cdot |ED|$  可知，

若  $|AE| = |DE|$  或者  $|AE| = |GE|$ ，则和全等等腰三角形共底边完全一样，利用公式  $R^2 = r^2 + (h-r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$  秒杀。

（备注：若  $\angle BAC = 60^\circ$ ，则  $|AE| = 3|EF|$ ，若  $\angle BAC = 120^\circ$ ，则  $|AE| = \frac{1}{3}|EF|$ ）

如图 8： $CD$  为  $Rt\triangle BCD$  的斜边，设二面角  $\angle AED_1 = \alpha$ ， $AE = h_1$ ， $D_1E = h_2$ ， $\triangle ABC$  外接圆的半径为  $r_1$ ， $\triangle DBC$

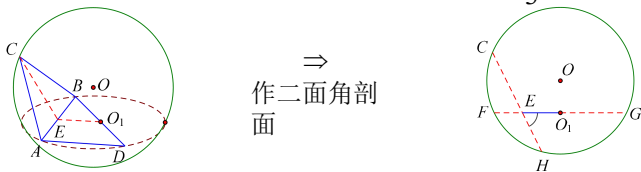
外接圆的半径为  $r_2 = \frac{CD}{2}$ ， $O_1E = h_2 - r_2$ ，延长  $AE$  交球于  $F$ ， $D_1E$  交球于  $G$ ，作如图 8 的二面角剖面图如图

图 9 所示，根据相交弦定理  $|AE| \cdot |EF| = |GE| \cdot |ED_1|$  可知，若  $|AE| = |D_1E|$  或者  $|AE| = |GE|$ ，利用公式

$R^2 = r^2 + (h-r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}$  秒杀。

【例 13】(2018·全国四模) 已知三棱锥  $D-ABC$  所有顶点都在球  $O$  的球面上,  $\triangle ABC$  为边长为  $2\sqrt{3}$  的正三角形,  $\triangle ABD$  是以  $BD$  为斜边的直角三角形, 且  $AD=2$ , 二面角  $C-AB-D$  为  $120^\circ$ , 则球  $O$  的表面积( )

- A.  $\frac{148\pi}{3}$       B.  $28\pi$       C.  $\frac{37\pi}{3}$       D.  $36\pi$

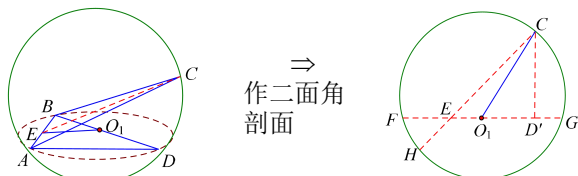
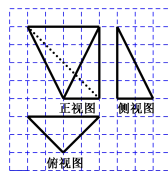


【解析】如图所示,  $\begin{cases} CE=3 \\ \angle CEG=120^\circ \Rightarrow EG=3, \text{ 故此题符合模型四,} \\ O_1E=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=CE=3 \\ \alpha=\angle CEG=120^\circ, \\ r=2, \end{cases}$

$$R^2 = r^2 + (h-r)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 7, \quad S = 4\pi R^2 = 28\pi, \quad \text{故选 B.}$$

【例 14】(2018·全国一模) 如图, 虚线小方格是边长为 1 的正方形, 粗实(虚)线为某几何体的三视图, 则该几何体外接球的表面积为( )

- A.  $4\pi$       B.  $8\pi$       C.  $16\pi$       D.  $32\pi$

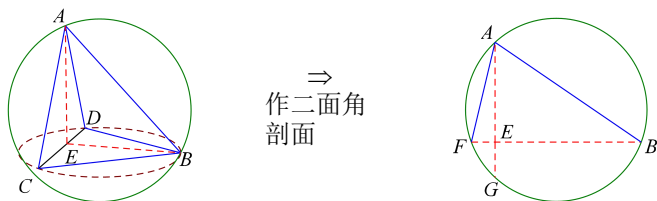


【解析】由题知  $\begin{cases} CD'=2 \\ O_1G=O_1F=2\sqrt{2} \Rightarrow O_1C=2\sqrt{2} \Rightarrow \angle FCG=90^\circ \Rightarrow R=O_1C=2\sqrt{2}, \text{ 故 } S=4\pi R^2=32\pi, \text{ 故选 D.} \\ O_1E=O_1D'=2, \end{cases}$

【例 15】(2018·长郡期末) 四面体  $A-BCD$  中,  $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$ ,  $AB=3$ ,  $CB=DB=2$ . 则此四面体外接球的表面积为( )

- A.  $\frac{19\pi}{2}$       B.  $\frac{19\sqrt{38}\pi}{24}$       C.  $17\pi$       D.  $\frac{17\sqrt{17}\pi}{6}$

【解析】由题知,  $\begin{cases} AB=3 \\ \angle ABC=\angle ABD=60^\circ \Rightarrow \begin{cases} CD=2 \\ AC=AD=\sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE=\sqrt{6} \\ BE=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle AEB=90^\circ \\ \sin \angle ABE=\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}, \text{ 作图如下:} \\ CB=DB=2, \end{cases}$



法一: 根据相交弦定理  $AE \cdot EG = BE \cdot EF$ , 由于  $\triangle BDC$  为等边三角形, 根据其外接圆知识可知  $|BE| = 3|EF|$ ,

$$\text{故可得} \begin{cases} |EF| = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ |AF| = \frac{\sqrt{57}}{3} \end{cases} \Rightarrow 2R = \frac{|AF|}{\sin \angle ABE} = \frac{\sqrt{38}}{2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{19}{2}\pi, \quad \text{故选 A.}$$

法二: 双半径单交线公式,  $\triangle BCD$  中,  $R_1 = \frac{2}{3}BE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\triangle ACD$  中,  $R_2 = \frac{AD}{2\sin \angle ACD} = \frac{\sqrt{7}}{2\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}} = \frac{7}{2\sqrt{6}}, \quad \frac{l}{2} = 1,$

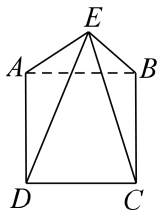
$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{19}{8}, \quad S = 4\pi R^2 = \frac{19}{2}\pi.$$



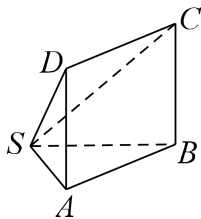
## 达标训练

1. (2019·潮州二模) 如图, 四棱锥  $E-ABCD$  中, 正方形  $ABCD$  的边长为 2,  $\triangle ABE$  为  $E$  为直角顶点的等腰三角形, 平面  $ABE \perp$  平面  $ABCD$ , 则该几何体外接球的表面积为 ( )

A.  $12\pi$                       B.  $6\sqrt{2}\pi$                       C.  $2\sqrt{2}\pi$                       D.  $8\pi$



第 1 题图



第 5 题图

2. (2019·安徽模拟) 在三棱锥  $E-ABD$  中, 已知  $AB=1$ ,  $DA=\sqrt{3}$ , 三角形  $BDE$  是边长为 2 的正三角形, 则三棱锥  $E-ABD$  的外接球的最小表面积为 ( )

A.  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$                       B.  $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$                       C.  $\frac{16\pi}{3}$                       D.  $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$

3. (2019·成都模拟) 三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中, 棱  $AB$ ,  $AC$ ,  $AA_1$  两两垂直,  $AB=AC$ , 且三棱柱的侧面积为  $\sqrt{2}+1$ , 若该三棱柱的顶点都在同一个球  $O$  的表面上, 则球  $O$  表面积的最小值为 ( )

A.  $\pi$                       B.  $\sqrt{2}\pi$                       C.  $2\pi$                       D.  $4\pi$

4. (2019·河北二模) 已知四面体  $ABCD$  的四个面都为直角三角形, 且  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $AB=BD=CD=2$ , 若该四面体的四个顶点都在球  $O$  的表面上, 则球  $O$  的表面积为 ( )

A.  $3\pi$                       B.  $2\sqrt{3}\pi$                       C.  $4\sqrt{3}\pi$                       D.  $12\pi$

5. (2019·莆田二模) 如图, 在四棱锥  $S-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  为矩形,  $AB=2\sqrt{3}$ ,  $AD=2$ ,  $\angle ASB=120^\circ$ ,  $SA \perp AD$ , 则四棱锥外接球的表面积为 ( )

A.  $16\pi$                       B.  $20\pi$                       C.  $80\pi$                       D.  $100\pi$

6. (2019·南关月考) 在四面体  $ABCD$  中, 若  $AB=CD=\sqrt{3}$ ,  $AC=BD=2$ ,  $AD=BC=\sqrt{5}$ , 则四面体  $ABCD$  的外接球的表面积为 ( )

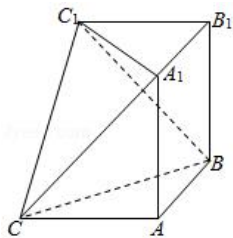
A.  $2\pi$                       B.  $4\pi$                       C.  $6\pi$                       D.  $8\pi$

7. (2019·武侯模拟) 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AB=4$ ,  $AD=CD=2$ , 将梯形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  折叠成三棱锥  $D-ABC$ , 当二面角  $D-AC-B$  是直二面角时, 三棱锥  $D-ABC$  的外接球的表面积为 ( )

A.  $4\pi$                       B.  $8\pi$                       C.  $12\pi$                       D.  $16\pi$

8. (2019·深圳模拟) 如右图所示,  $AA_1$ ,  $BB_1$  均垂直于平面  $ABC$  和平面  $A_1B_1C_1$ ,  $\angle BAC = \angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$ ,  $AC=AB$ ,  $A_1C_1=A_1B_1=AB=A_1A=B_1C_1=\sqrt{2}$ , 则多面体  $ABC-A_1B_1C_1$  的外接球的表面积为 ( )

A.  $2\pi$   
B.  $4\pi$   
C.  $6\pi$   
D.  $8\pi$



## 第一章 立体几何

9. (2018•金牛模拟) 已知四边形  $ABCD$  是边长为 2 的菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$ , 沿对角线  $BD$  将  $\triangle ABD$  折起使  $A$  位于新位置  $A'$ , 且  $A'C = \sqrt{3}$ , 则三棱锥  $A'-BCD$  的外接球的表面积为 ( )

A.  $\frac{52\pi}{9}$       B.  $\frac{50\pi}{9}$       C.  $6\pi$       D.  $25\pi$

10. (2019•渝水月考) 已知三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{3}$ ,  $PA = PB = 3\sqrt{2}$ , 且二面角  $P-AB-C$  的大小为  $150^\circ$ , 则三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为 ( )

A.  $100\pi$       B.  $108\pi$       C.  $110\pi$       D.  $111\pi$

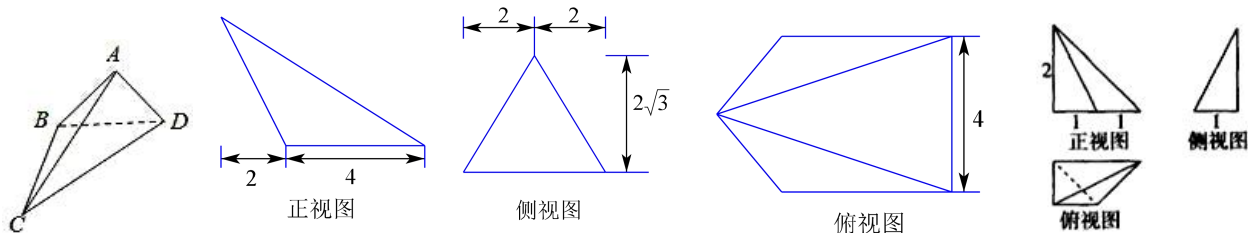
11. (2018•临川期末) 在三棱锥  $S-ABC$  中,  $AB = BC = \sqrt{2}$ ,  $SA = SC = AC = 2$ , 二面角  $S-AC-B$  的余弦值是  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 则三棱锥  $S-ABC$  外接球的表面积是 ( )

A.  $\frac{3}{2}\pi$       B.  $2\pi$       C.  $\sqrt{6}\pi$       D.  $6\pi$

12. (2018•黄州三模) 如图, 四面体  $ABCD$  中, 面  $ABD$  和面  $BCD$  都是等腰  $Rt \triangle$ ,  $AB = \sqrt{2}$ ,  $\angle BAD = \angle CBD = \frac{\pi}{2}$ , 且二面角  $A-BD-C$  的大小为  $\frac{5\pi}{6}$ , 若四面体  $ABCD$  的顶点都在球  $O$  上, 则球  $O$  的表面积为 ( )

A.  $12\pi$       B.  $20\pi$       C.  $24\pi$       D.  $36\pi$

13. 已知一个四棱锥三视图如图所示, 若此四棱锥的五个顶点在某个球面上, 则该球的表面积为 ( )



12 题图

13 题图

14 题图

A.  $48\pi$       B.  $52\pi$       C.  $\frac{172\pi}{3}$       D.  $\frac{196\pi}{3}$

14. (2019•河北一模) 某棱锥的三视图如图所示, 则该棱锥的外接球的表面积为 ( )

A.  $8\pi$       B.  $9\pi$       C.  $\frac{41}{4}\pi$       D.  $\sqrt{41}\pi$

15. (2019•黄山一模) 已知三棱锥  $A-BCD$ ,  $BC = 6$ , 且  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$  均为等边三角形, 二面角  $A-BC-D$  的平面角为  $60^\circ$ , 则三棱锥外接球的表面积是\_\_\_\_\_.

16. (2019•城关月考) 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AB = BC = 3\sqrt{2}$ , 侧面  $PAC$  为正三角形, 且顶点  $P$  在底面上的射影落在  $\triangle ABC$  的重心  $G$  上, 则该三棱锥的外接球的表面积为\_\_\_\_\_.

17. (2019•宝鸡一模) 已知一个四面体  $ABCD$  的每个顶点都在表面积为  $9\pi$  的球  $O$  的表面上, 且  $AB = CD = a$ ,  $AC = AD = BC = BD = \sqrt{5}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

18. (2018•南平一模) 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $AB = BC = AC = 3$ ,  $\angle PAC = \angle PAB$ ,  $PA = 2$ ,  $PA$  与平面  $ABC$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 则三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为\_\_\_\_\_.