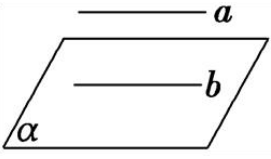
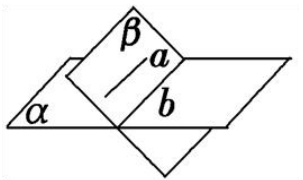
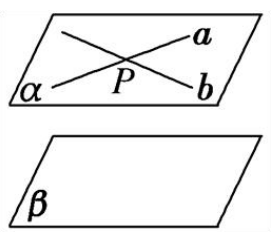
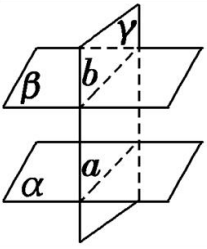


专题 4 线面平行与面面平行的判定及性质

一、直线与平面平行

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则直线与此平面平行.		$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ b // a \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha$
性质定理	如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.		$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$

二、平面与平面平行

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面内有两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行		$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a // \beta \\ b // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$
性质定理	如果两个平行平面与第三个平面相交，那么它们的交线平行		$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$

【例 1】 下列条件中，能判断两个平面平行的是（ ）

A. 一个平面内的一条直线平行于另一个平面

B. 一个平面内的两条直线平行于另一个平面

C. 一个平面内有无数条直线平行于另一个平面

D. 一个平面内任何一条直线都平行于另一个平面

【解析】 由面面平行的定义可知选 D.

【例 2】 若直线 a 平行于平面 α ，则下列结论错误的是（ ）

A. a 平行于 α 内的所有直线

B. α 内有无数条直线与 a 平行

C. 直线 a 上的点到平面 α 的距离相等

D. α 内存在无数条直线与 a 垂直

【解析】 A 错误， a 与 α 内的直线平行或异面.

【例 3】 已知不重合的直线 a, b 和平面 α ，①若 $a // \alpha, b \subset \alpha$ ，则 $a // b$ ；②若 $a // \alpha, b // \alpha$ ，则 $a // b$ ；③若 $a // b, b \subset \alpha$ ，则 $a // \alpha$ ；④若 $a // b, a // \alpha$ ，则 $b // \alpha$ 或 $b \subset \alpha$ ，上面命题中正确的是_____ (填序号).

【解析】 ①中 a 与 b 可能异面；②中 a 与 b 可能相交、平行或异面；③中 a 可能在平面 α 内，④正确.

第一章 立体几何

【例4】已知 α 、 β 是平面， m 、 n 是直线，给出下列命题：①若 $m \perp \alpha$ ， $m \subset \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$. ②若 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \alpha$ ， $m \parallel \beta$ ， $n \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$. ③如果 $m \subset \alpha$ ， $n \not\subset \alpha$ ， m 、 n 是异面直线，那么 n 与 α 相交. ④若 $\alpha \cap \beta = m$ ， $n \parallel m$ ，且 $n \not\subset \alpha$ ， $n \not\subset \beta$ ，则 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$ 其中正确命题的个数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】对于①，由定理“如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直”得知，①正确；对于②，注意到直线 m 、 n 可能是两条平行直线，此时平面 α 、 β 可能是相交平面，因此②不正确；对于③，满足条件的直线 n 可能平行于平面 α ，因此③不正确；对于④，由定理“如果平面外一条直线平行于平面内一条直线，那么这条直线平行于这个平面”得知，④正确. 综上所述，其中正确的命题是①④，故选 B.

【例5】已知 m 、 n 表示两条不同直线， α 、 β 、 γ 表示不同平面，给出下列三个命题：

① $\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow m \parallel n$ ； ② $\begin{cases} m \perp \alpha \\ m \perp n \end{cases} \Rightarrow n \parallel \alpha$ ； ③ $\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \parallel \alpha \end{cases} \Rightarrow m \perp n$ 其中真命题的个数为（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【解析】若 $\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \perp \alpha \end{cases}$ ，则 $m \parallel n$ ，即命题①正确；若 $\begin{cases} m \perp \alpha \\ m \perp n \end{cases}$ ，则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$ ，即命题②不正确；若 $\begin{cases} m \perp \alpha \\ n \parallel \alpha \end{cases}$ ，则 $m \perp n$ ，即命题③正确；综上可得，真命题共有 2 个. 故选 C.

【例6】已知 m 、 n 、 l_1 、 l_2 表示直线， α 、 β 表示平面. 若 $m \subset \alpha$ ， $n \subset \alpha$ ， $l_1 \subset \beta$ ， $l_2 \subset \beta$ ， $l_1 \cap l_2 = M$ ，则以下条件中，能推出 $\alpha \parallel \beta$ 的是（ ）

- A. $m \parallel \beta$ 且 $l_1 \parallel \alpha$ B. $m \parallel \beta$ 且 $n \parallel \beta$ C. $m \parallel \beta$ 且 $n \parallel l_2$ D. $m \parallel l_1$ 且 $n \parallel l_2$

【解析】由定理“如果一个平面内有两条相交直线分别与另一个平面平行，那么这两个平面平行”可得，由选项 D 可推知 $\alpha \parallel \beta$.

【例7】在下列条件中，可判断平面 α 与 β 平行的是（ ）

- A. α 、 β 都平行于直线 l B. α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等
C. l 、 m 是 α 内两条直线，且 $l \parallel \beta$ ， $m \parallel \beta$ D. l 、 m 是两条异面直线，且 $l \parallel \alpha$ ， $m \parallel \alpha$ ， $l \parallel \beta$ ， $m \parallel \beta$

【解析】排除法，A 中 α 、 β 可以是相交平面；B 中三点可面平面两侧；C 中两直线可以不相交. 故选 D，也可直接证明.

【例8】经过平面外的两点作该平面的平行平面可以作（ ）

- A. 0 个 B. 1 个 C. 0 个或 1 个 D. 1 个或 2 个

【解析】这两点可以是在平面同侧或两侧. 故选 C.

达标训练 1

1. (2019•延安一模) 已知 m, n 表示两条不同的直线, α 表示平面. 下列说法正确的是 ()

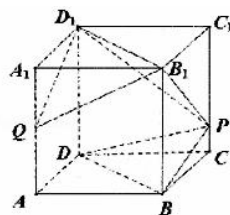
- A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$ B. 若 $m \perp \alpha, n \perp \alpha$, 则 $m // n$
C. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n // \alpha$ D. 若 $m // \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$

2. (2019•湖北期中) 平面 α 与平面 β 平行的条件可以是 ()

- A. α 内有无数多条直线都与 β 平行
B. 直线 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 $a // \beta, b // \alpha$
C. 直线 $a // \alpha, a // \beta$, 且直线 a 不在 α 内, 也不在 β 内
D. 一个平面 α 内两条不平行的直线都平行于另一个平面 β

3. (2019•深圳二模) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, P 为棱 CC_1 的动点, Q 为棱 AA_1 的中点, 设直线 m 为平面 BDP 与平面 B_1D_1P 的交线, 以下关系中正确的是 ()

- A. $m // D_1Q$ B. $m //$ 平面 B_1D_1Q
C. $m \perp B_1Q$ D. $m \perp$ 平面 ABB_1A_1



4. (2019•聊城二模) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, F, F, G, H 分别为棱 $A_1B_1, BB_1, CC_1, C_1D_1$ 的中点, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $AD_1 //$ 平面 $EFGH$ B. $BD_1 // GH$
C. $BD // EF$ D. 平面 $EFGH //$ 平面 A_1BCD_1

5. (2019•汕头月考) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 BC_1, CD_1 的中点, 则下列判断错误的是 ()

- A. $MN \perp CC_1$ B. $MN \perp$ 平面 ACC_1A_1
C. $MN //$ 平面 $ABCD$ D. $MN // A_1B_1$

6. (2019•大连一模) 已知 m, n 为两条不重合直线, α, β 为两个不重合平面, 下列条件中, 可以作为 $\alpha // \beta$ 的充分条件的是 ()

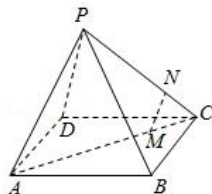
- A. $m // n, m \subset \alpha, n \subset \beta$ B. $m // n, m \perp \alpha, n \perp \beta$
C. $m \perp n, m // \alpha, n // \beta$ D. $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$

7. (2019•汕头一模) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 是四边形 $ABCD$ 的中心, 关于直线 A_1O , 下列说法正确的是 ()

- A. $A_1O // D_1C$ B. $A_1O \perp BC$
C. $A_1O //$ 平面 B_1CD_1 D. $A_1O \perp$ 平面 AB_1D_1

8. (2019•青云月考) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, M, N 分别为 AC, PC 上的点, 且 $MN //$ 平面 PAD , 则 ()

- A. $MN // PD$ B. $MN // PA$
C. $MN // AD$ D. 以上均有可能



9. (2019•上饶一模) 设 m, n 表示不同的直线, α, β 表示不同的平面, 且 $m, n \subset \alpha$. 则“ $\alpha // \beta$ ”是“ $m // \beta$ 且 $n // \beta$ ”的 ()

第一章 立体几何

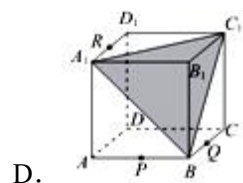
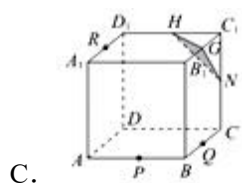
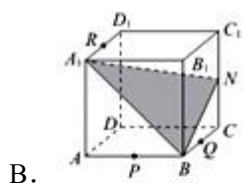
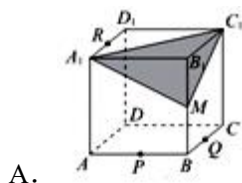
A. 充分但不必要条件

B. 必要但不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

10. (2018•沧州一模) 如图, 在下列四个正方体中, P, R, Q, M, N, G, H 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 阴影平面与 PRQ 所在平面平行的是 ()



11. (2017•洛南期末) 已知平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 直线 $m \subset \alpha$, 直线 $n \subset \beta$, 下列结论中不正确的是 ()

A. $m \parallel \beta$

B. $n \parallel \alpha$

C. $m \parallel n$

D. m 与 n 不相交

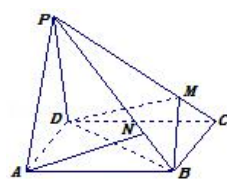
12. (2018•杭州期中) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, M, N 分别为线段 PC, PB 上一点, 若 $PM:MC=3:1$, 且 $AN \parallel$ 平面 BDM , 则 $PN:NB=()$

A. 4:1

B. 3:1

C. 3:2

D. 2:1



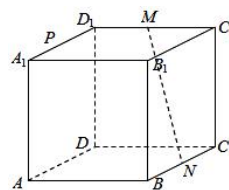
13. (2018•厦门二模) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, P 分别是 C_1D_1, BC, A_1D_1 的中点, 则下列命题正确的是 ()

A. $MN \parallel AP$

B. $MN \parallel BD_1$

C. $MN \parallel$ 平面 BB_1D_1D

D. $MN \parallel$ 平面 BDP



14. (2018•辛集期中) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD=60^\circ$, Q 为 AD 的中点, 点 M 在线段 PC 上, $PM=tPC$, $PA \parallel$ 平面 MQB , 则实数 t 的值为 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

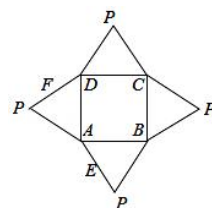
15. (2018•四川模拟) 如图是某几何体的平面展开图, 其中四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 PA, PD 的中点. 在此几何体中, 以下结论一定成立的是 ()

A. 直线 $BE \parallel PF$

B. 直线 $EF \parallel$ 平面 PBC

C. 平面 $BCE \perp$ 平面 PAD

D. 直线 PB 与 DC 所成角为 60°



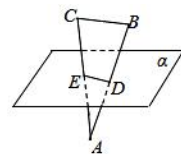
16. (2017•万州期末) 平面 α 与 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 分别交于点 D, E , 且 $AD:DB=AE:EC$, 如图, 则 BC 与 α 的位置关系是 ()

A. 异面

B. 相交

C. 平行或相交

D. 平行



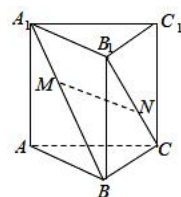
17. (2018•桃城模拟) 如图, 各棱长均为 1 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, M, N 分别为线段 A_1B, B_1C 上的动点, 且 $MN \parallel$ 平面 ACC_1A_1 , 则这样的 MN 有 ()

A. 1 条

B. 2 条

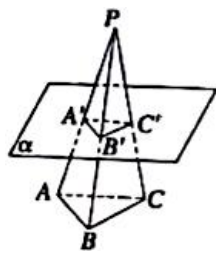
C. 3 条

D. 无数条



18. (2018•雁江月考) 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, 平面 $\alpha \parallel$ 平面 ABC , 且 α 交线段 PA , PB , PC 于点 A' , B' , C' , 若 $PA':AA'=2:3$, 则 $S_{\triangle A'B'C'}:S_{\triangle ABC} =$ ()

- A. 2:3
B. 2:5
C. 4:9
D. 4:25



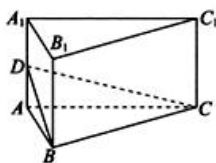
19. (2018·香坊四模) 对于不重合的两个平面 α 和 β , 给定下列条件:

- ①存在直线 l ，使得 $l \perp \alpha$ ，且 $l \perp \beta$ ；
- ②存在平面 γ ，使得 $\alpha \perp \gamma$ 且 $\beta \perp \gamma$ ；
- ③ α 内有不共线的三点到 β 的距离相等；
- ④存在异面直线 l, m ，使得 $l // \alpha, l // \beta, m // \alpha, m // \beta$ 。

其中，可以判定 α 与 β 平行的条件有（ ）

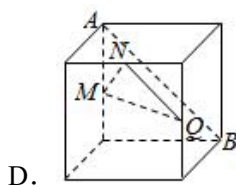
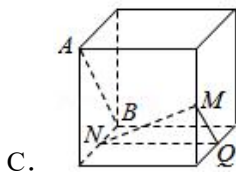
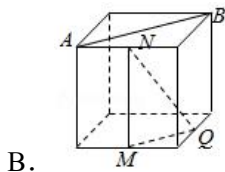
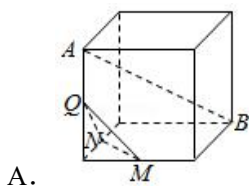
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

20. (2018•西城期末)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 为 AA_1 中点, 点 P 在侧面 BCC_1B_1 上运动, 当点 P 满足条件_____时, $A_1P \parallel$ 平面 BCD (答案不唯一, 填一个满足题意的条件即可)



达标训练 2

1. (2017•新课标I) 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是 ()



2. (2011·浙江) 若直线 l 不平行于平面 α , 且 $l \not\subset \alpha$, 则 ()

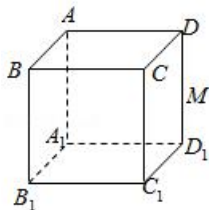
- A. α 内存在直线与 l 异面
B. α 内存在与 l 平行的直线
C. α 内存在唯一的直线与 l 平行
D. α 内的直线与 l 都相交

3. (2010·浙江) 设 l, m 是两条不同的直线, α 是一个平面, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $l \perp m$, $m \subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha$ B. 若 $l \perp \alpha$, $l // m$, 则 $m \perp \alpha$
C. 若 $l // \alpha$, $m \subset \alpha$, 则 $l // m$ D. 若 $l // \alpha$, $m // \alpha$, 则 $l // m$

4. (2010·江西) 如图, M 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 DD_1 的中点, 给出下列命题

- ①过 M 点有且只有一条直线与直线 AB 、 B_1C_1 都相交;
②过 M 点有且只有一条直线与直线 AB 、 B_1C_1 都垂直;
③过 M 点有且只有一个平面与直线 AB 、 B_1C_1 都相交;
④过 M 点有且只有一个平面与直线 AB 、 B_1C_1 都平行.



其中真命题是 ()

- A. ②③④ B. ①③④ C. ①②④ D. ①②③

5. (2008•湖南) 已知直线 m 、 n 和平面 α 、 β 满足 $m \perp n$ ， $m \perp \alpha$ ， $\alpha \perp \beta$ ，则 ()
- A. $n \perp \beta$ B. $n // \beta$ ，或 $n \subset \beta$ C. $n \perp \alpha$ D. $n // \alpha$ ，或 $n \subset \alpha$
6. (2007•北京) 平面 $\alpha //$ 平面 β 的一个充分条件是 ()
- A. 存在一条直线 a ， $a // \alpha$ ， $a // \beta$
- B. 存在一条直线 a ， $a \subset \alpha$ ， $a // \beta$
- C. 存在两条平行直线 a ， b ， $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a // \beta$ ， $b // \alpha$
- D. 存在两条异面直线 a ， b ， $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a // \beta$ ， $b // \alpha$
7. (2011•福建) 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ，点 E 为 AD 的中点，点 F 在 CD 上，若 $EF //$ 平面 AB_1C ，则线段 EF 的长度等于_____.

