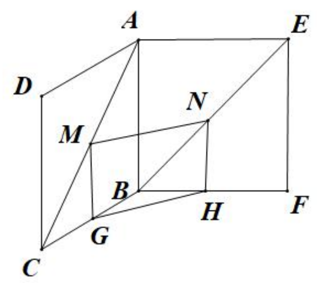
专题 5　线面平行与面面平行解答题

第一讲 线面平行构造之平行四边形法

要证明一直线平行于另一平面，可以构造一个平行四边形，利用另一组对边平行且相等来证明这组对边平行．这个另一组对边，往往在重垂线、水平线、侧平线中寻找，因为它们必然平行，只需要证明相等即可．

构造方式：1．重垂线构造法　2．水平线构造法　3．侧平线构造法

【例 1】如下图，两个全等的正方形 $ABCD$ 和 $ABFE$ 所在平面相交于 AB，$M\in AC$，$N\in EB$ 且 $AM=EN$，求证：$MN//$ 平面 BCF．



【证明】如图，作 $MG//AB$ 交 BC 于 G，作 $NH//AB$ 交 BF 于 H；

$\because MG//AB$，$AB//NH$，$\therefore MG//NH$

又$\because ABCD$ 和 $ABFE$ 是两个全等的正方形

$\therefore AC=BE$ $\angle ACB=\angle ACB=45°$　$\angle MGC=\angle NHB=90°$

$\because AM=EN$，$\therefore MC=BN$　$\therefore \triangle MCG\cong\triangle NBH$ $\therefore MG=NH$

$\therefore MGHN$ 是平行四边形，$\therefore MN//GH$

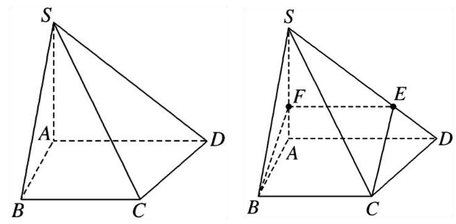
$\because GH\subset CBF$　$\therefore MN//$ 平面 BCF．

点评：重垂线构造法，因为 M、N 两点都能作重垂线的平行线．

【例 2】如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，已知底面 $ABCD$ 为直角梯形，其中 $AD//BC$，$\angle BAD=90°$，$SA\perp$ 底面 $ABCD$，$SA=AB=BC=2$．$\tan\angle SDA=\dfrac{2}{3}$．

（1）求四棱锥 $S-ABCD$ 的体积；

（2）在棱 SD 上找一点 E，使 $CE//$ 平面 SAB，并证明．



【解析】（1）$\because SA\perp$ 底面 $ABCD$，$\tan\angle SDA=\dfrac{2}{3}$，$SA=2$，$\therefore AD=3$．

由题意知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面为直角梯形，且 $SA=AB=BC=2$，

$V_{S-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times SA\times\dfrac{1}{2}\times(BC+AD)\times AB=\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{1}{2}\times(2+3)\times2=\dfrac{10}{3}$．

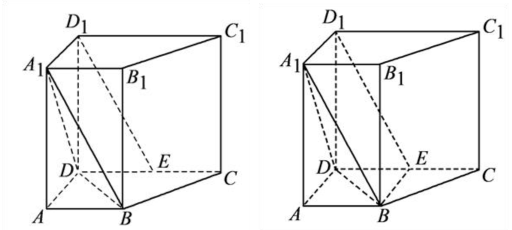
（2）当点 E 位于棱 SD 上靠近 D 的三等分点处时，可使 $CE//$ 平面 SAB．

取 SD 上靠近 D 的三等分点为 E，取 SA 上靠近点 A 的三等分点为 F，连接 CE，EF，BF，则 $EF=\dfrac{2}{3}AD$，$BC=\dfrac{2}{3}AD$，

$\therefore BC=EF$．$\therefore CE//BF$．又$\because BF\subset$ 平面 SAB，$CE\not\subset$ 平面 SAB，$\therefore CE//$ 平面 SAB．

点评：水平线构造法，由于 B、C 位于水平线上，故构造一条平行于 BC 的水平线．

【例 3】如图所示，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $DC=DD_1=2AD=2AB$，$AD\perp DC$，$AB//DC$，设 E 是 DC 的中点．求证：D_1E // 平面 A_1BD．



【证明】如图，连接 BE，则四边形 $DABE$ 为正方形，

$\therefore BE=AD=A_1D_1$，且 $BE//AD//A_1D_1$，$\therefore$ 四边形 A_1D_1EB 为平行四边形，$\therefore D_1E//A_1B$

又 $D_1E\not\subset$ 平面 A_1BD，$A_1B\not\subset$ 平面 A_1BD

$\therefore$ D_1E // 平面 A_1BD．

点评：侧平线构造法，A_1、D_1 位于侧平线两端．

第一章 立体几何

第二讲 线面平行构造之三角形中位线法

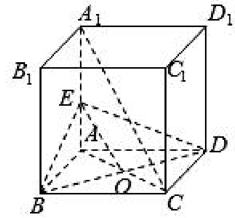
证明一直线平行于另一平面，可以找到由一个公共顶点引出的两条线段，并分别找到线段中点，构造三角形中位线来证明线面平行.

往往需要找出五点，即两个线段端点，一个中点，公共顶点，再找出另一个中点，最后连线即得.

中位线法不需要依托重垂线、水平线、侧平线的载体，但一定要找到公共顶点.

【例 4】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AA_1 的中点.

求证：A_1C // 平面 BDE .



【证明】设 $AC\cap BD=O$，$\because$ E、O 分别是 AA_1、AC 的中点，$\therefore$ A_1C // EO

又 $A_1C\not\subset$ 平面 BDE，$EO\subset$ 平面 BDE，$\therefore$ A_1C // 平面 BDE

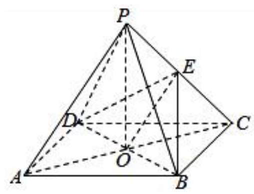
【例 5】如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=AB=a$,点 E 在棱 PC 上． 问点 E 在何处时，PA // 平面EBD，并加以证明.

【解析】当 E 为 PC 中点时，PA // 平面EBD .

连接 AC，且 $AC\cap BD=O$，由于四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore O$ 为 AC 的中点，又 E 为中点，$\therefore OE$ 为 $\triangle ACP$ 的中位线，

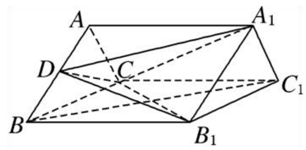
$\therefore$ PA // EO，又 $PA\not\subset$ 平面 EBD，$\therefore$ PA // 平面 EBD .



【例 6】如图，在正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，点 D 为棱 AB 的中点，$BC=1$， $AA_1=\sqrt{3}$.

（1）求证：BC_1 // 平面 A_1CD；

（2）求三棱锥 $D—A_1B_1C$ 的体积.



【解析】（1）证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 O，连接 OD.

$\because$ ▱ACC_1A_1 中，O 为 AC_1 的中点，D 为 AB 的中点，$\therefore OD$ // BC_1，

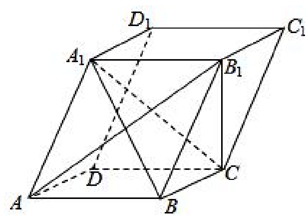
又 $BC_1\not\subset$ 平面 A_1CD，$OD\subset$ 平面 A_1CD，$\therefore BC_1$ // 平面 A_1CD.

（2）在正三角形 ABC 中，D 为 AB 的中点，则 $CD\perp AB$，又$\because$平面 $ABC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\therefore CD\perp$ 平面 ABB_1A_1.

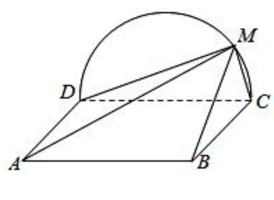
$\therefore CD$ 为三棱锥 $D—A_1B_1C$ 的高，$\because CD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle A_1B_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore V_{D-A_1B_1C}=V_{C-A_1B_1D}=\dfrac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle A_1B_1D_1}=\dfrac{1}{4}$.

达标训练

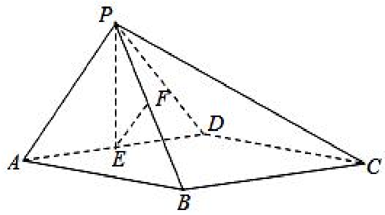
1.（2018•江苏）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$．求证：AB // 平面 A_1B_1C；



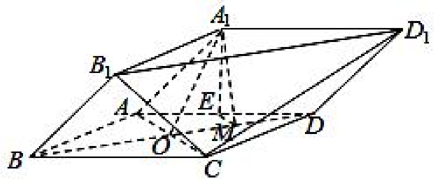
2.（2018•新课标III）如图，矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点.在线段 AM 上是否存在点 P，使得 MC / / 平面 PBD？说明理由.



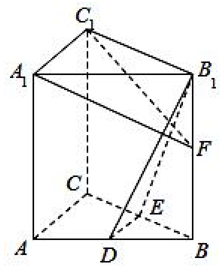
3.（2018•北京）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，E，F 分别为 AD，PB 的中点．求证：$EF//$ 平面 PCD．



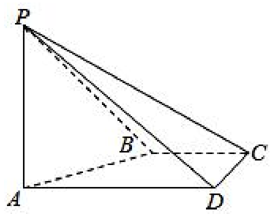
4.（2017•山东）由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$ 平面 $ABCD$，证明：$A_1O//$ 平面 B_1CD_1．



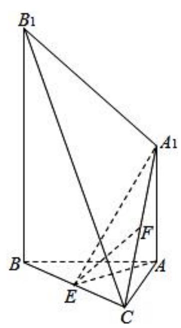
5.（2016•江苏）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别为 AB，BC 的中点，点 F 在侧棱 B_1B 上，且 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\perp A_1B_1$．求证：直线 $DE//$ 平面 A_1C_1F．



6.（2016•四川）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp CD$，$AD//BC$，$\angle ADC=\angle PAB=90^\circ$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$．在平面 PAD 内找一点 M，使得直线 $CM//$ 平面 PAB，并说明理由．

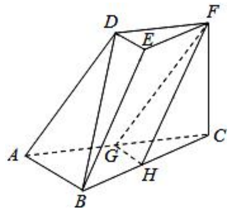


7.（2015•天津）如图，已知 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$BB_1//AA_1$，$AB=AC=3$，$BC=2\sqrt{5}$，$AA_1=\sqrt{7}$，$BB_1=2\sqrt{7}$，点 E 和 F 分别为 BC 和 A_1C 的中点．求证：$EF//$ 平面 A_1B_1BA．

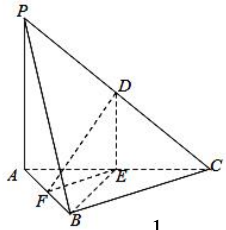


8.（2015•山东）如图，三棱台 $DEF-ABC$ 中，$AB=2DE$，G，H 分别为 AC，BC 的中点．

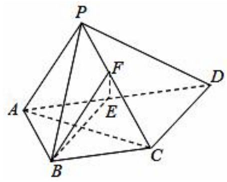
求证：$BD//$ 平面 FGH．



9.（2014•江苏）如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，D，E，F 分别为棱 PC，AC，AB 的中点，已知 $PA\perp AC$，$PA=6$，$BC=8$，$DF=5$．求证：直线 $PA//$ 平面 DEF．



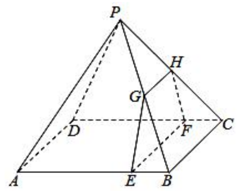
10.（2014•山东）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AP\perp$ 平面 PCD，$AD//BC$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，E，F 分别为线段 AD，PC 的中点．求证：$AP//$ 平面 BEF．



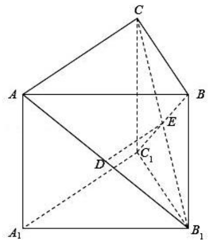
11.（2014•安徽）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 8 的正方形，四条侧棱长均为 $2\sqrt{17}$，点 G，E，F，H 分别是棱 PB，AB，CD，PC 上共面的四点，平面 $GEFH\perp$ 平面 $ABCD$，$BC//$ 平面 $GEFH$．

（1）证明：$GH//EF$；

（2）若 $EB=2$，求四边形 $GEFH$ 的面积．



12.（2015•江苏）如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AC\perp BC$，$BC=CC_1$，设 AB_1 的中点为 D，$B_1C\cap BC_1=E$．求证：$DE//$ 平面 AA_1C_1C．



13.（2013•新课标II）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别是 AB，BB_1 的中点．

（1）证明：$BC_1//$ 平面 A_1CD；

（2）$AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，求三棱锥 $C-A_1DE$ 的体积．