

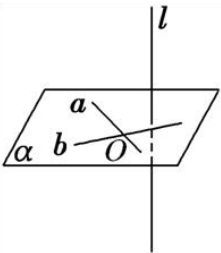
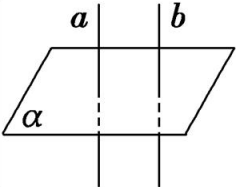
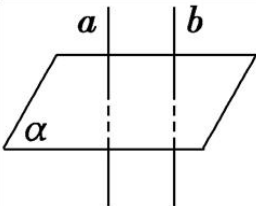
专题 6 线面垂直与面面垂直的判定及性质

一、直线与平面垂直

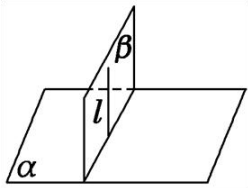
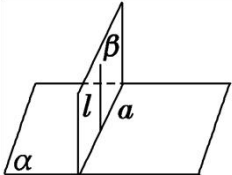
1. 直线和平面垂直的定义

直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，就说直线 l 与平面 α 互相垂直

2. 性质定理与判定定理

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一条直线与平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直		$\left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = O \\ l \perp a \\ l \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$
推论	如果在两条平行直线中，有一条垂直于平面，那么另一条直线也垂直这个平面		$\left. \begin{array}{l} a // b \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$
性质定理	垂直于同一个平面的两条直线平行		$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$

二、平面与平面垂直

	文字语言	图形语言	符号语言
判定定理	一个平面过另一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直		$\left. \begin{array}{l} l \subset \beta \\ l \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$
性质定理	两个平面互相垂直，则一个平面内垂直于交线的直线垂直于另一个平面		$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ l \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = a \\ l \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$

【例 1】给出下列四个命题：①垂直于同一平面的两条直线相互平行；②垂直于同一平面的两个平面相互平行；③若一个平面内有无数条直线与另一个平面都平行，那么这两个平面相互平行；④若一条直线垂直于一个平面内的任一直线，那么这条直线垂直于这个平面。其中真命题的个数是（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

第一章 立体几何

【解析】命题①，④为真，命题②，③为假．故选 B．

【例 2】直线 l 不垂直于平面 α ，则 α 内与 l 垂直的直线有 ()

- A. 0 条 B. 1 条 C. 无数条 D. α 内所有直线

【解析】可以有无数条．故选 C．

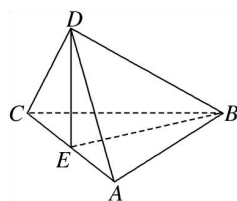
【例 3】设 α 、 β 、 γ 为彼此不重合的三个平面， l 为直线，给出下列命题：①若 $\alpha \parallel \beta$ ， $\alpha \perp \gamma$ ，则 $\beta \perp \gamma$ ；②若 $\alpha \perp \gamma$ ， $\beta \perp \gamma$ ，且 $\alpha \cap \beta = l$ ，则 $l \perp \gamma$ ；③若直线 l 与平面 α 内的无数条直线垂直，则直线 l 与平面 α 垂直；④若 α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等，则平面 α 平行于平面 β ．上面命题中，真命题的序号为 _____ (写出所有真命题的序号)．

【解析】③中 $l \parallel \alpha$ 也满足，④中 α 与 β 可能相交．答案：①②．

【例 4】如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，若 $AB=CB$ ， $AD=CD$ ， E 是 AC 的中点，则下列命题中正确的有 _____．(填序号)

- ①平面 $ABC \perp$ 平面 ABD ；②平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ；③平面 $ABC \perp$ 平面 BDE ，且平面 $ACD \perp$ 平面 BDE ；④平面 $ABC \perp$ 平面 ACD ，且平面 $ACD \perp$ 平面 BDE ．

【解析】因为 $AB=CB$ ，且 E 是 AC 的中点，所以 $BE \perp AC$ ，同理有 $DE \perp AC$ ，于是 $AC \perp$ 平面 BDE ．因为 $AC \subset$ 平面 ABC ，所以平面 $ABC \perp$ 平面 BDE ．又由于 $AC \subset$ 平面 ACD ，所以平面 $ACD \perp$ 平面 BDE ．故只有③正确．



几个常用的结论：(1) 过空间任一点有且只有一条直线与已知平面垂直；(2) 过空间任一点有且只有一个平面与已知直线垂直；(3) 垂直于同一平面的两条直线互相平行；(4) 垂直于同一直线的两个平面互相平行．

【例 5】(2011·浙江) 下列命题中错误的是 ()

- A. 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β ，那么平面 α 内一定存在直线平行于平面 β
 B. 如果平面 α 不垂直于平面 β ，那么平面 α 内一定不存在直线垂直于平面 β
 C. 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 γ ，平面 $\beta \perp$ 平面 γ ， $\alpha \cap \beta = l$ ，那么 $l \perp$ 平面 γ
 D. 如果平面 $\alpha \perp$ 平面 β ，那么平面 α 内所有直线都垂直于平面 β

【解析】对于命题 A，在平面 α 内存在直线 l 平行于平面 α 与平面 β 的交线，则 l 平行于平面 β ，故命题 A 正确．对于命题 B，若平面 α 内存在直线垂直于平面 β ，则平面 α 与平面 β 垂直，故命题 B 正确．

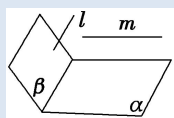
对于命题 C，设 $\alpha \cap \gamma = m$ ， $\beta \cap \gamma = n$ ，在平面 γ 内取一点 P 不在 l 上，过 P 作直线 a, b ，使 $a \perp m$ ， $b \perp n$ ． $\because \gamma \perp \alpha$ ， $a \perp m$ ，则 $a \perp \alpha$ ， $\therefore a \perp l$ ，同理有 $b \perp l$ ．又 $a \cap b = P$ ， $a \subset \gamma$ ， $b \subset \gamma$ ， $\therefore l \perp \gamma$ ．故命题 C 正确．

对于命题 D，设 $\alpha \cap \beta = l$ ，则 $l \subset \alpha$ ，但 $l \subset \beta$ ．故在 α 内存在直线不垂直于平面 β ，即命题 D 错误．故选 D．

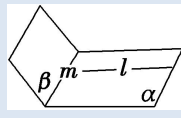
【例 6】已知直线 m, l 和平面 α, β ，则能够推出 $\alpha \perp \beta$ 的条件是 ()

- A. $m \perp l$ ， $m \parallel \alpha$ ， $l \parallel \beta$ B. $m \perp l$ ， $\alpha \cap \beta = m$ ， $l \subset \alpha$
 C. $m \parallel l$ ， $m \perp \alpha$ ， $l \perp \beta$ D. $m \parallel l$ ， $l \perp \beta$ ， $m \subset \alpha$

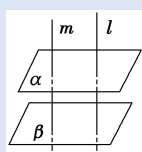
【解析】由 $\left. \begin{matrix} m \perp l \\ m \parallel \alpha \\ l \parallel \beta \end{matrix} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$ ，如图



，由 $\left. \begin{matrix} m \perp l \\ m \parallel \alpha \\ l \parallel \beta \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow \alpha \perp \beta$ ，如图



由 $\left. \begin{matrix} m \parallel l \\ m \perp \alpha \\ l \perp \beta \end{matrix} \right\} \not\Rightarrow \alpha \perp \beta$ ，如图



，所以选项 A, B, C 都不对．又选项 D 能推出 $\alpha \perp \beta$ ，所以 D 正确，

故选 D．

第一章 立体几何

【例 7】设 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列四个命题:

- ①若 $a \perp b, a \perp \alpha, b \not\subset \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$; ②若 $a \parallel \alpha, a \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$;
③若 $a \perp \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$; ④若 $a \perp b, a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$.

其中正确命题的个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】通过线面垂直及平行的判定定理和性质定理, 可以判断四个命题都正确. 故选 D.

达标训练

1. 已知 m 和 n 是两条不同的直线, α 和 β 是两个不重合的平面, 那么下面给出的条件中一定能推出 $m \perp \beta$ 的是 ()

- A. $\alpha \perp \beta$, 且 $m \subset \alpha$ B. $m \parallel n$, 且 $n \perp \beta$
C. $\alpha \perp \beta$, 且 $m \parallel \alpha$ D. $m \perp n$, 且 $n \parallel \beta$

2. 已知 m 和 n 是两条不同的直线, α 和 β 是两个不重合的平面, 则下列给出的条件中, 一定能推出 $m \perp \beta$ 的是 ()

- A. $\alpha \perp \beta$, 且 $m \subset \alpha$ B. $\alpha \perp \beta$, 且 $m \parallel \alpha$ C. $m \parallel n$, 且 $n \perp \beta$ D. $m \perp n$, 且 $n \parallel \beta$

3. 已知 l, m 是两条不同的直线, α 是一个平面, 以下命题正确的是 ()

- A. 若 $l \perp \alpha, l \perp m$, 则 $m \not\subset \alpha$ B. 若 $l \parallel \alpha, m \not\subset \alpha$, 则 $l \parallel m$
C. 若 $l \perp \alpha$, , 则 $l \perp m$ D. 若 $l \perp \alpha, l \perp \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$

4. 三条不重合的直线 a, b, c 及三个不重合的平面 α, β, γ , 下列命题正确的是 ()

- A. 若 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = n, m \perp n$, 则 $m \perp \alpha$ B. 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$
C. 若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$ D. $n \perp \alpha, n \perp \beta, m \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$

5. 已知 H 是球 O 的直径 AB 上一点, $AH:HB=1:2, AB \perp$ 平面 α, H 为垂足, α 截球 O 所得截面的面积为 π , 则球 O 的表面积为 ()

- A. $\frac{5}{3}\pi$ B. 4π C. $\frac{9}{2}\pi$ D. $\frac{144}{35}\pi$

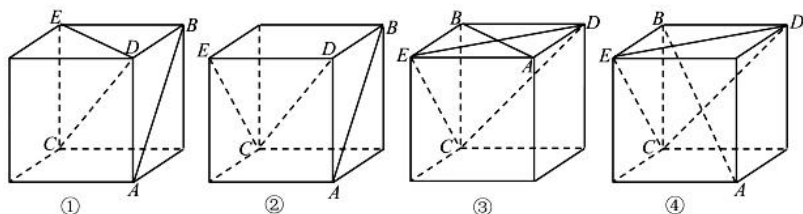
6. 已知互相垂直的平面 α, β 交于直线 l , 若直线 m, n 满足 $m \parallel \alpha, n \perp \beta$, 则 ()

- A. $m \parallel l$ B. $m \parallel n$ C. $n \perp l$ D. $m \perp n$

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 O 是四边形 $ABCD$ 的中心, 关于直线 A_1O , 下列说法正确的是 ()

- A. $A_1O \parallel D_1C$ B. $A_1O \parallel$ 平面 B_1CD_1
C. $A_1O \perp BC$ D. $A_1O \perp$ 平面 AB_1D_1

8. 如图, 在以下四个正方体中, 直线 AB 与平面 CDE 垂直的是 ()

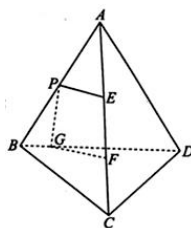


- A. ①② B. ②④ C. ①③ D. ②③

第一章 立体几何

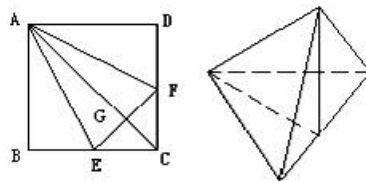
9. 如图, 正四面体 $ABCD$ 中, E, F 分别是线段 AC 的三等分点, P 是线段 AB 的中点, G 是直线 BD 的动点, 则 ()

- A. 存在点 G , 使 $PG \perp EF$ 成立
- B. 存在点 G , 使 $FG \perp EP$ 成立
- C. 不存在点 G , 使平面 $EFG \perp$ 平面 ACD 成立
- D. 不存在点 G , 使平面 $EFG \perp$ 平面 ABD 成立



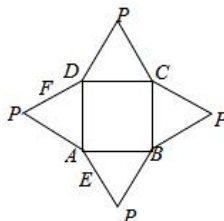
10. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, G 是 EF 的中点, 现在沿 AE, AF 及 EF 把这个正方形折成一个空间图形, 使 B, C, D 三点重合, 重合后的点记为 H , 那么, 在这个空间图形中必有 ()

- A. $AG \perp \triangle EFH$ 所在平面
- B. $AH \perp \triangle EFH$ 所在平面
- C. $HF \perp \triangle AEF$ 所在平面
- D. $HG \perp \triangle AEF$ 所在平面



11. 如图是一个几何体的平面展开图, 其中 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 PA, PD 的中点, 在此几何体中, 给出下面四个结论:

- ①直线 BE 与直线 CF 异面;
- ②直线 BE 与直线 AF 异面;
- ③直线 $EF \parallel$ 平面 PBC ;
- ④平面 $BCE \perp$ 平面 PAD .

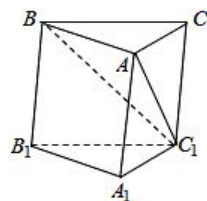


其中正确结论的个数是 ()

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

12. 如图所示, 在斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $BC_1 \perp AC$, 则 C_1 在面 ABC 上的射影 H 必在 ()

- A. 直线 AB 上
- B. 直线 BC 上
- C. 直线 CA 上
- D. $\triangle ABC$ 内部



13. 设 m, n 为空间两条不同的直线, α, β 为空间两个不同的平面, 给出下列命题:

- ①若 $m \perp \alpha$, $m \parallel \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$;
- ②若 $m \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$;
- ③若 $m \subset \alpha$, $n \subset \alpha$ 且 $m \parallel \beta$, $n \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$;
- ④若 $m \perp \alpha$, $n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 则 $m \perp n$.

其中所有正确命题的序号是 ()

- A. ①②
- B. ②③
- C. ③④
- D. ①④

14. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, PA, PB, PC 两两垂直, 且 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内的射影 H 在 $\triangle ABC$ 内, 则 H 一定是 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 内心
- B. 外心
- C. 垂心
- D. 重心

15. 已知平面 $\alpha \parallel \beta$, a 是直线, 则“ $a \perp \alpha$ ”是“ $a \perp \beta$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

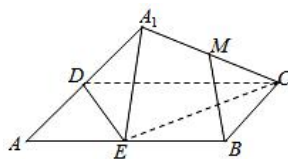
第一章 立体几何

16. 已知三条直线 a, b, c 及平面 α , 具备以下哪一条件时 $a \parallel b$ ()

- A. $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$ B. $a \perp c, b \perp c$ C. $a \perp c, c \perp \alpha, b \parallel \alpha$ D. $a \perp \alpha, b \perp \alpha$

17. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2AD$, E 为边 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$. 若 M 为线段 A_1C 的中点, 则在 $\triangle ADE$ 翻折过程中, 下列结论中正确的有: ()

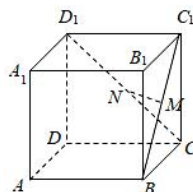
- ①总存在某个位置, 使 $CE \perp$ 平面 A_1DE ;
②总有 $BM \parallel$ 平面 A_1DE ;
③存在某个位置, 使 $DE \perp A_1C$.



- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

18. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 BC_1, CD_1 的中点, 则下列说法错误的是 ()

- A. $MN \perp CC_1$ B. $MN \perp$ 平面 ACC_1A_1
C. $MN \parallel AB$ D. $MN \parallel$ 平面 $ABCD$

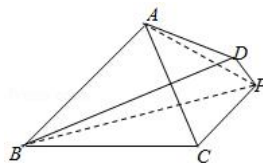


19. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, $MD \perp$ 平面 $ABCD$, $NB \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $MD = NB = 1$, E 为 MC 的中点, 则下列结论不正确的是 ()

- A. 平面 $BCE \perp$ 平面 ABN B. $MC \perp AN$
C. 平面 $CMN \perp$ 平面 AMN D. 平面 $BDE \parallel$ 平面 AMN

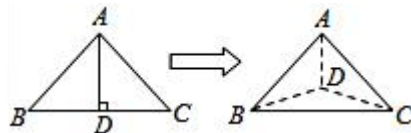
20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PBC$ 是正三角形, 平面 $PAB \perp$ 平面 PBC , $AC \perp BD$, 则下列结论不一定成立的是 ()

- A. $PB \perp AC$
B. $PD \perp$ 平面 $ABCD$
C. $AC \perp PD$
D. 平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$



21. 如图, 以等腰直角三角形 ABC 的斜边 BC 上的高 AD 为折痕, 把 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 折成互相垂直的两个平面后, 某学生得出下列四个结论:

- ① $BD \perp AC$; ② $\triangle BAC$ 是等边三角形;
③三棱锥 $D-ABC$ 是正三棱锥; ④平面 $ADC \perp$ 平面 ABC .



其中正确的是 ()

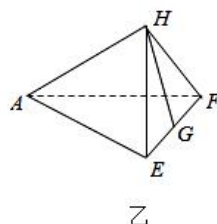
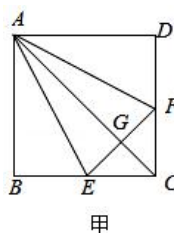
- A. ①②④ B. ①②③ C. ②③④ D. ①③④

22. 空间四边形 $ABCD$ 中, 若 $AD \perp BC$, $AD \perp BD$, 那么有 ()

- A. 平面 $ABC \perp$ 平面 ADC B. 平面 $ABC \perp$ 平面 ADB
C. 平面 $ABC \perp$ 平面 DBC D. 平面 $ADC \perp$ 平面 DBC

23. 如图甲所示, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, G 是 EF 的中点, 现在沿 AE, AF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体, 使 B, C, D 三点重合, 重合后的点记为 H , 如图乙所示, 那么, 在四面体 $A-EFH$ 中必有 ()

- A. $AH \perp$ $\triangle EFH$ 所在平面
B. $AG \perp$ $\triangle EFH$ 所在平面
C. $HF \perp$ $\triangle AEF$ 所在平面
D. $HG \perp$ $\triangle AEF$ 所在平面



第一章 立体几何

24. 下列命题中错误的是 ()

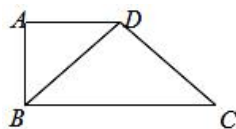
- A. 如果 $\alpha \perp \beta$, 那么 α 内一定存在直线平行于平面 β
- B. 如果 $\alpha \perp \beta$, 那么 α 内所有直线都垂直于平面 β
- C. 如果平面 α 不垂直平面 β , 那么 α 内一定不存在直线垂直于平面 β
- D. 如果 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $\alpha \cap \beta = l$, 那么 $l \perp \gamma$

25. 对于不重合的直线 m , l 和平面 α , β , 要证 $\alpha \perp \beta$ 需具备的条件是 ()

- A. $m \perp l$, $m // \alpha$, $l // \beta$
- B. $m \perp l$, $\alpha \cap \beta = m$, $l \subset \alpha$
- C. $m // l$, $m \perp \alpha$, $l \perp \beta$
- D. $m // l$, $l \perp \beta$, $m \subset \alpha$

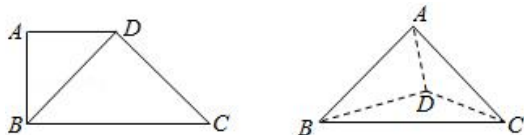
26. 如图所示, 四边形 $ABCD$ 中, $AD // BC$, $AD = AB$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使面 $ABD \perp$ 面 BCD , 连结 AC , 则下列命题正确的是 ()

- A. 面 $ABD \perp$ 面 ABC
- B. 面 $ADC \perp$ 面 BDC
- C. 面 $ABC \perp$ 面 BDC
- D. 面 $ADC \perp$ 面 ABC



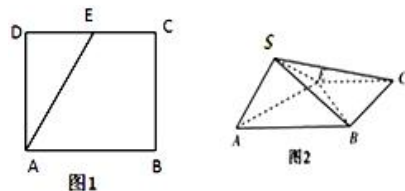
27. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD // BC$, $AD = AB$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle BAD = 90^\circ$. 将 $\triangle ADB$ 沿 BD 折起, 使 $CD \perp$ 平面 ABD , 构成三棱锥 $A-BCD$. 则在三棱锥 $A-BCD$ 中, 下列结论正确的是 ()

- A. $AD \perp$ 平面 BCD
- B. $AB \perp$ 平面 BCD
- C. 平面 $BCD \perp$ 平面 ABC
- D. 平面 $ADC \perp$ 平面 ABC



28. 如图, 点 E 为正方形 $ABCD$ 边 CD 上异于点 C , D 的动点, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折成 $\triangle SAE$, 使得平面 $SAE \perp$ 平面 $ABCE$, 则下列三个说法中正确的个数是 ()

- ① 存在点 E 使得直线 $SA \perp$ 平面 SBC ;
- ② 平面 SBC 内存在直线与 SA 平行;
- ③ 平面 $ABCE$ 内存在直线与平面 SAE 平行.



- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

29. 设 α , β 为不重合的平面, m , n 为不重合的直线, 则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $m \subset \alpha$, $n \subset \beta$, $m // n$, 则 $\alpha // \beta$
- B. 若 $n \perp \alpha$, $n \perp \beta$, $m \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$
- C. 若 $m // \alpha$, $n // \beta$, $m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$
- D. 若 $\alpha \perp \beta$, $n \perp \beta$, $m \perp n$, 则 $m \perp \alpha$