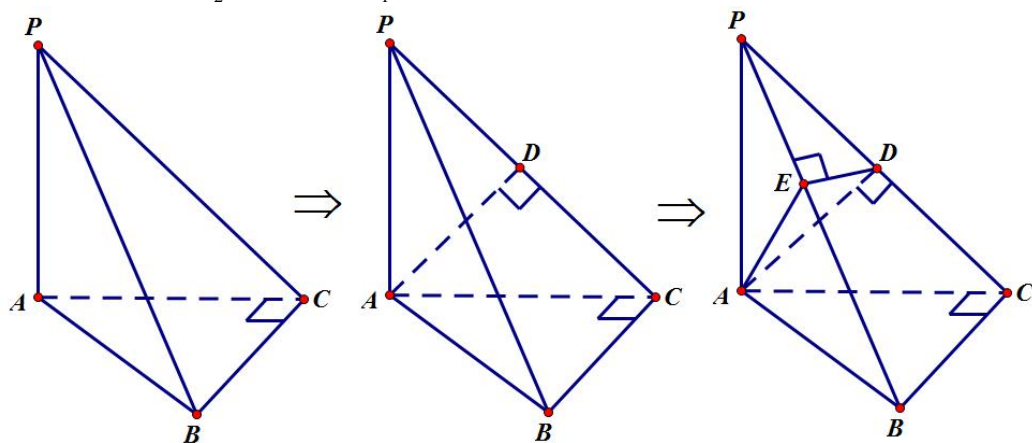


专题 7 线面垂直的判定与证明

第一讲 在被垂直平面找垂直（鳖臑法则）

定理：若一条直线 l 垂直于一个平面，如果在被垂直的平面内找到相互垂直的两条线 $l_1 \perp l_2$ (l_1 与 l 相交)，则与 l 异面的直线 l_2 垂直于 l 和 l_1 构成的平面。鳖臑是最典型的例子。



当出现重垂线 PA 时，就需要在水平面 ACB 内找到两条垂直相交的直线 $AC \perp BC$ ，由于 AC 与重垂线 PA 相交，故能得到 $BC \perp$ 面 PAC ，同理， PAC 作为被垂直的平面，在平面内找到 $AD \perp PC$ ， BC 与 PC 相交，故可以得到 $AD \perp$ 面 PBC ， PBC 作为被垂直的平面，需要在这个面内找到垂直的两条直线，当 $DE \perp PB$ 时（或 $AE \perp PB$ ），能得到 $PB \perp$ 面 ADE 。

具体书写格式：

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} PA \perp \text{面} ACB \\ BC \subset \text{面} ACB \end{array} \right\} \Rightarrow PA \perp BC \\
 \left. \begin{array}{l} BC \perp AC \\ PA \cap AC = A \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp \text{面} PAC, \text{同理} \\
 \left. \begin{array}{l} BC \perp \text{面} PAC \\ AD \subset \text{面} PAC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp BC \\
 \left. \begin{array}{l} AD \perp PC \\ PC \cap BC = C \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp \text{面} PBC \\
 \left. \begin{array}{l} AD \perp \text{面} PBC \\ PB \subset \text{面} PBC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp PB \\
 \left. \begin{array}{l} DE \perp PB (\text{或} AE \perp PB) \\ DE \cap AD = D (\text{或} AE \cap AD = A) \end{array} \right\} \Rightarrow PB \perp \text{面} ADE
 \end{array}$$

【例 1】已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $SA \perp$ 面 ABC ， $AD \perp SC$ ，求证： $AD \perp$ 面 SBC 。

【证明】

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} SA \perp \text{面} ACB \\ BC \subset \text{面} ACB \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp BC \\
 \left. \begin{array}{l} BC \perp AC \\ SA \cap AC = A \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp \text{面} SAC, \text{同理} \\
 \left. \begin{array}{l} BC \perp \text{面} SAC \\ AD \subset \text{面} SAC \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp BC \\
 \left. \begin{array}{l} AD \perp SC \\ SC \cap BC = C \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp \text{面} SBC.
 \end{array}$$

第一章 立体几何

【例2】 已知 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=2$, $PA=AD=4$, E 为 BC 的中点.

(1) 求证: $DE \perp$ 平面 PAE ;

(2) 求直线 DP 与平面 PAE 所成的角.

【证明】 (1) 在 $\triangle ADE$ 中, $AD^2 = AE^2 + DE^2$, $\therefore AE \perp DE$

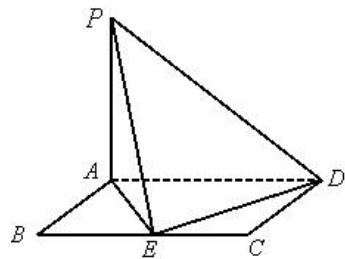
$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $DE \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp DE$

又 $PA \cap AE = A$, $\therefore DE \perp$ 平面 PAE

【解析】 (2) $\angle DPE$ 为 DP 与平面 PAE 所成的角

在 $Rt\triangle PAD$ 中, $PD = 4\sqrt{2}$, 在 $Rt\triangle DCE$ 中, $DE = 2\sqrt{2}$

在 $Rt\triangle DEP$ 中, $PD = 2DE$, $\therefore \angle DPE = 30^\circ$.



【小结】 按照推导式写的证明步骤比传统方式更简洁明了.

【例3】 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, E, F 分别是 AP, AD 的中点. 求证:

(1) 直线 $EF \parallel$ 平面 PCD ;

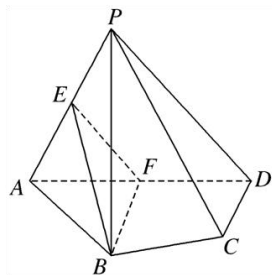
(2) 平面 $BEF \perp$ 平面 PAD .

【证明】 (1) 在 $\triangle PAD$ 中, 因为 E, F 分别为 AP, AD 的中点, 所以 $EF \parallel PD$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 PCD , $PD \subset$ 平面 PCD , 所以直线 $EF \parallel$ 平面 PCD .

(2) 连接 BD . 因为 $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, 所以 $\triangle ABD$ 为正三角形. 因为 F 是 AD 的中点, 所以 $BF \perp AD$. 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $BF \subset$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $BF \perp$ 平面 PAD .

又因为 $BF \subset$ 平面 BEF , 所以平面 $BEF \perp$ 平面 PAD .



【例4】 如图, 已知 $AB \perp$ 平面 BCE , $CD \parallel AB$, $\triangle BCE$ 是正三角形, $AB=BC=2CD$.

(1) 在线段 BE 上是否存在一点 F , 使 $CF \parallel$ 平面 ADE ?

(2) 求证: 平面 $ADE \perp$ 平面 ABE .

【解析】 (1) 当 F 为 BE 的中点时, $CF \parallel$ 平面 ADE .

【证明】 取 BE 的中点 F , AE 的中点 G , 连接 FG, GD, CF ,

$\therefore GF = \frac{1}{2}AB$, $GF \parallel AB$. $\because DC = \frac{1}{2}AB$, $CD \parallel AB$,

$\therefore CD \parallel GF$. $\therefore$ 四边形 $CFGD$ 是平行四边形.

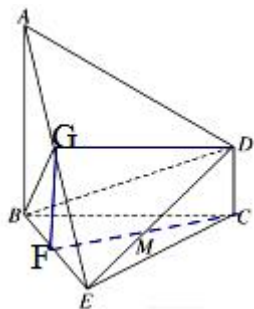
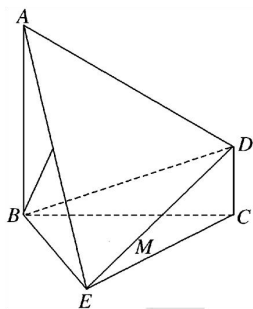
$\therefore CF \parallel GD$. 又 $CF \not\subset$ 平面 ADE , $DG \subset$ 平面 ADE ,

$\therefore CF \parallel$ 平面 ADE .

(2) $\because CF \perp BF$, $CF \perp AB$, $\therefore CF \perp$ 平面 ABE .

$\because CF \parallel DG$, $\therefore DG \perp$ 平面 ABE . $\because DG \subset$ 平面 ADE ,

$\therefore$ 平面 $ABE \perp$ 平面 ADE .



第二讲 等腰三角形三线合一构造法

在没有特殊的重垂线和水平面, 证一些线面垂直则需要一些特殊的几何性质, 由有着共底边的两个等腰三角形构成的立体图形, 则两个顶点的连线一定垂直于底边.

$$\left. \begin{array}{l} PB = PC \\ BD = CD \end{array} \right\} \Rightarrow PD \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ BD = CD \end{array} \right\} \Rightarrow AD \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} PD \perp BC \\ AD \perp BC \\ AD \cap PD = D \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp \text{面} PAD \Rightarrow BC \perp PA$$

【例5】如图, 已知空间四边形 $ABCD$ 中, $BC = AC$, $AD = BD$, E 是 AB 的中点.

求证: (1) $AB \perp$ 平面 CDE ;

(2) 平面 $CDE \perp$ 平面 ABC .

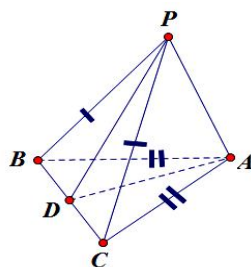
【证明】(1) $\left. \begin{array}{l} BC = AC \\ AE = BE \end{array} \right\} \Rightarrow CE \perp AB$ 同理, $\left. \begin{array}{l} AD = BD \\ AE = BE \end{array} \right\} \Rightarrow DE \perp AB$

又 $\because CE \cap DE = E$

$\therefore AB \perp$ 平面 CDE

(2) 由 (1) 有 $AB \perp$ 平面 CDE 又 $\because AB \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore$ 平面 $CDE \perp$ 平面 ABC



【例6】如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是 $\angle DAB = 60^\circ$ 且边长为 a 的菱形, 侧面 PAD 是等边三角形, 且平面 PAD 垂直于底面 $ABCD$.

(1) 若 G 为 AD 的中点, 求证: $BG \perp$ 平面 PAD ;

(2) 求证: $AD \perp PB$.

【证明】(1) $\triangle ABD$ 为等边三角形且 G 为 AD 的中点, $\therefore BG \perp AD$

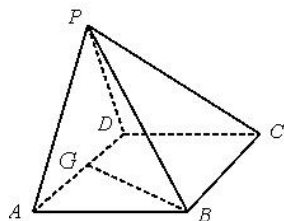
又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore BG \perp$ 平面 PAD ;

(2) PAD 是等边三角形且 G 为 AD 的中点, $\therefore AD \perp PG$

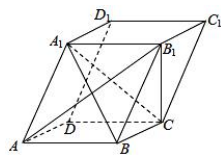
且 $AD \perp BG$, $PG \cap BG = G$, $\therefore AD \perp$ 平面 PBG ,

$PB \subset$ 平面 PBG , $\therefore AD \perp PB$.

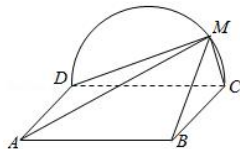


达标训练

1. (2018·江苏) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB$, $AB_1 \perp B_1C_1$. 求证: 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC .



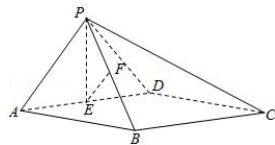
2. (2018·新课标III) 如图, 矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\widehat{CD}$ 所在平面垂直, M 是 $\widehat{CD}$ 上异于 C, D 的点. 求证: 平面 $AMD \perp$ 平面 BMC .



3. (2018•北京) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, E, F 分别为 AD, PB 的中点.

(1) 求证: $PE \perp BC$;

(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .

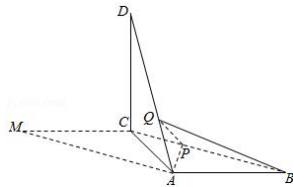


4. (2018•新课标I) 如图, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB = AC = 3$, $\angle ACM = 90^\circ$, 以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点 M 到达点 D 的位置, 且 $AB \perp DA$.

(1) 求证: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;

(2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点,

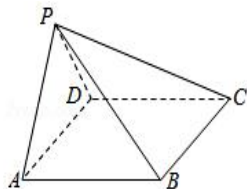
且 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$, 求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.



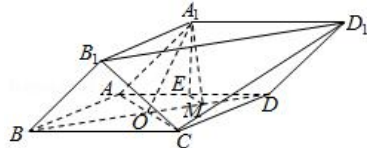
5. (2017•新课标I) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;

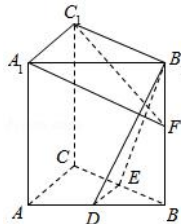
(2) 若 $PA = PD = AB = DC$, $\angle APD = 90^\circ$, 且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{8}{3}$, 求该四棱锥的侧面积.



6. (2017•山东) 由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示, 四边形 $ABCD$ 为正方形, O 为 AC 与 BD 的交点, E 为 AD 的中点, $A_1E \perp$ 平面 $ABCD$, 设 M 是 OD 的中点, 求证: 平面 $A_1EM \perp$ 平面 B_1CD_1 .

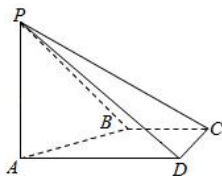


7. (2016•江苏) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 AB, BC 的中点, 点 F 在侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D \perp A_1F$, $A_1C_1 \perp A_1B_1$. 求证: 平面 $B_1DE \perp$ 平面 A_1C_1F .



8. (2016•四川) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp CD$, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$, $BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

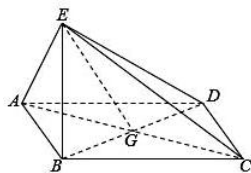
求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBD .



9. (2015•新课标I) 如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求证: 平面 $AEC \perp$ 平面 BED ;

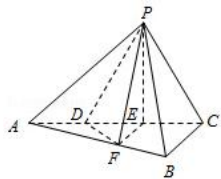
(2) 若 $\angle ABC = 120^\circ$, $AE \perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.



第一章 立体几何

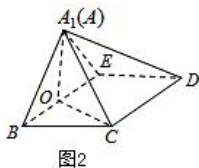
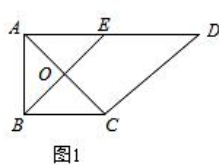
10. (2015•重庆) 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 点 D 、 E 在线段 AC 上, 且 $AD = DE = EC = 2$, $PD = PC = 4$, 点 F 在线段 AB 上, 且 $EF \parallel BC$.

- (1) 求证: $AB \perp$ 平面 PFE ;
(2) 若四棱锥 $P-DFBC$ 的体积为 7, 求线段 BC 的长.



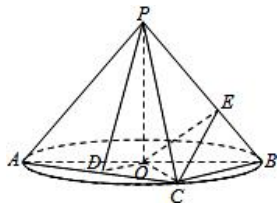
11. (2015•陕西) 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$, E 是 AD 的中点, O 是 AC 与 BE 的交点. 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到如图 2 中 $\triangle A_1BE$ 的位置, 得到四棱锥 A_1-BCDE .

- (1) 求证: $CD \perp$ 平面 A_1OC ;
(2) 当平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$ 时, 四棱锥 A_1-BCDE 的体积为 $36\sqrt{2}$, 求 a 的值.

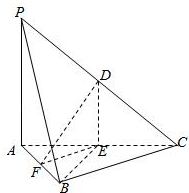


12. (2015•福建) 如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是圆 O 上异于 A , B 的点, PO 垂直于圆 O 所在的平面, 且 $PO = OB = 1$,

- (1) 若 D 为线段 AC 的中点, 求证: $AC \perp$ 平面 PDO ;
(2) 求三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值;
(3) 若 $BC = \sqrt{2}$, 点 E 在线段 PB 上, 求 $CE + OE$ 的最小值.

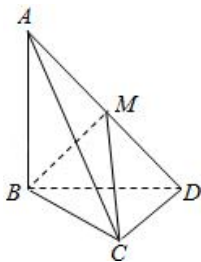


13. (2014•江苏) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, D , E , F 分别为棱 PC , AC , AB 的中点, 已知 $PA \perp AC$, $PA = 6$, $BC = 8$, $DF = 5$. 求证: 平面 $BDE \perp$ 平面 ABC .

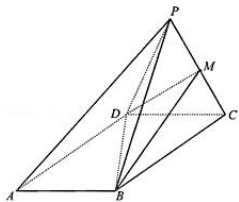


14. (2014•福建) 如图, 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $CD \perp BD$.

- (1) 求证: $CD \perp$ 平面 ABD ;
(2) 若 $AB = BD = CD = 1$, M 为 AD 中点, 求三棱锥 $A-MBC$ 的体积.



15. (2019•南通模拟) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $AD = 2$, $AB = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, 平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 为 PC 上一点. 求证: 平面 $MBD \perp$ 平面 PCD .

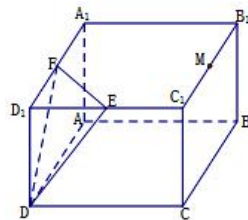


第一章 立体几何

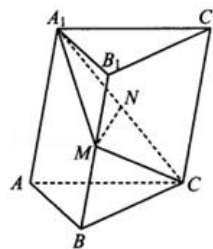
16. (2019•揭阳二模) 已知如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=4$, $BB_1=2\sqrt{2}$, 点 E, F, M 分别为 C_1D_1, A_1D_1, B_1C_1 的中点, 过点 M 的平面 α 与平面 DEF 平行, 且与长方体的面相交, 交线围成一个几何图形.

(1) 在图中画出这个几何图形, 并求这个几何图形的面积 (画图说出作法, 不用说明理由);

(2) 求证: $D_1B \perp$ 平面 DEF .



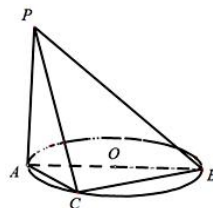
17. (2019•四川模拟) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 已知点 M 在棱 BB_1 上, 且 $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BB_1}$, 点 N 在线段 A_1C 上, 且 $\overline{A_1N} = \overline{NC}$, 且 $MN \perp AA_1$, $MN \perp A_1C$. 求证: 平面 $A_1MC \perp$ 平面 A_1ACC_1 .



18. (2019•沭阳期中) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\odot O$ 上的动点, PA 垂直于 $\odot O$ 所在的平面 ABC .

(1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC ;

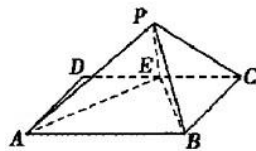
(2) 设 $PA=3$, $AC=\sqrt{3}$, 求点 A 到平面 PBC 的距离.



19. (2019•聊城二模) 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, E 为 CD 的中点, 以 AE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 D 到达点 P 的位置, 且 $\angle PAB = 60^\circ$.

(1) 求证: 平面 $PEC \perp$ 平面 PAB ;

(2) 若三棱锥 $E-PEC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求该三棱锥的表面积.



20. (2019•大兴一模) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp AB$, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $PA=AD$, $DC=2AB$, E 为 PC 中点.

(1) 求证: $PA \perp BC$;

(2) 求证: 直线 $BE \parallel$ 平面 PAD ;

(3) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 PDC .

